Проф. С. Ф. БАЛДИН

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

89 фигур в тексте, 159 вопросов и задач с подробными решениями их.



Издание
The YMCA PRESS Ltd.
ПРАГА, 1923

Американское Издательство.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Составление курса «Основы механики» вызвано желанием дать руководство для средних общеобразовательных и технических учебных заведений, для самообразования, а также для курсов заочного обучения.

Характер изложения приноровлен к кругу сведений лиц, прошедших начала алгебры и геометрии. В некоторых местах введены тригонометрические величины, причем с ними не требуется производить какие-либо специальные выкладки. Для лиц, незнакомых с тригонометрией, вполне достаточны те вводные пояснения, которые даны попутно в тексте.

В конце глав или после рассмотрения отдельных вопросов в книге приведен ряд упражнений в виде примеров и задач. Настоятельно советуем читателю попытаться дать ответ на них на основании предшествующего содержания книги и обращаться за справками к ответам в конце книги только при крайнем затруднении в самостоятельной работе и для поверки полученных результатов. Ответы на вопросы и решения задач следует делать в письменной форме. При чтении книги необходимо постепенно вычерчивать чертежи, о которых идет речь.

Каждая глава содержит ряд основных определений и выводов. Наиболее важные оттенены в тексте. Советуем читателю отчетливо усвоить их, применять при решении вопросов и снова повторить по решении задач соответствующей главы.

Мы ограничились очень небольшим объемом настоящего руководства, рассматривая его как первый этап и вместе с тем первый концентр в данной отрасли знаний. Книга тем не менее является вполне самостоятельной, заключая законченный круг сведений, имеющих непосредственное прикладное значение. В дальнейшем намечено последовательное развитие изложенных основных сведений по механике также в связи с применением их к практическим вопросам.

При составлении книги мы руководствовались главным образом своим опытом преподавания теоретической механики и в частности курсов, близких к данному. Ряд задач и рисунков взяты из сочинения Котткэмпа (Kottcamp. Elementary Mechanics for Practical Engineer).

Нью-Иорк—Прага. *С. Балдин.*

Оглавление.

Введение.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

СТАТИКА.

ГЛАВА I.

Силы и их измерение.

ГЛАВА II.

Сложение и разложение сил, пересекающихся в одной точке.

ГЛАВА III.

Равновесие сил, пересекающихся в одной точке.

ГЛАВА IV.

Параллельные силы.

ГЛАВА V.

Центр тяжести.

ГЛАВА VI.

Силы, действующие в плоскости. Общие и частные условия равновесия их.

ГЛАВА VII.

Трение.

ГЛАВА VIII.

Простые машины: рычаг, ворот и блок.

ГЛАВА IX.

Наклонная плоскость.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ДИНАМИКА.

ГЛАВА X.

Движение тел.

ГЛАВА XI.

Зависимость между движением и силами.

ГЛАВА XII.

Сложение движений и скоростей.

ГЛАВА XIII.

Вращательное движение.

ГЛАВА XIV.

Работа и мощность.

ГЛАВА XV.

Энергия.

ВВЕДЕНИЕ.

1. Механика и ее роль в технике. Лицам, посвятившим себя технической деятельности, приходится или возводить вновь различные сооружения в виде, напр., зданий, мостов и т. п. и строить машины, или же обслуживать существующие постройки и машины. Все сооружения, удовлетворяя своему назначению в смысле целесообразности, должны быть надежны и прочны. Для выполнения последнего требования необходимо знать те силы, которые действуют в сооружениях, те изменения, которые они могут произвести. Задача и содержание механики состоит в изучении действия сил на тела, в установлении зависимостей как между самими силами, встречающимися в данном сооружении, так и между силами и действием их. В каждой машине существуют силы, стремящиеся разрушить ее; найдя при помощи методов механики эти силы, инженер или уравновесит действие их соответственной конструкцией машины, или введет другие силы, которые устранят действие первых.

Таким образом, изучение сил, как причин, стремящихся перемещать или изменять тела и их части, является одной из первых задач для техника. Этим занимается теоретическая механика, выводы которой служат необходимым основанием для механики п р и к л а д н о й, в которой выводы теоретической механики в связи со свойствами матерьялов применяются к проектированию и постройке зданий и машин. Изложение основ учения о силах и о движении тел под действием сил или, что то же, основ теоретической механики с приложением к простым машинам составляет, как указано в предисловии, задачу настоящего курса.

2. Общая программа курса. Если мы обратим внимание на различные постройки, машины и части машин, мы увидим, что некоторые из них находятся в покое (здания, мосты, основания машин и т. п.), другие (валы машин, блоки, зубчатые колеса и т. п.) при работе машин движутся. Сообразно с этим силы, действующие в тех или других частях машин, таковы, что взятые в своей совокупности, они или не выводят тела из состояния покоя, или же производят движение и при том нередко переменного характера. Первый случай рассматривается в части механики, называемой с т а т и к о й; изучение второго вопроса составляет содержание д и н а м и к и или кинетики, как иногда называют эту часть механики.

Все, излагаемое ниже, относится к телам, неизменяющим свою форму, т. е. абсолютно твердым, или, что то же, к такой совокупности матерьяльных частиц, которую принято называть неизменяемой системой точек (или частиц). Если не будет сделано оговорок, силы, действующие на тела, предполагаются лежащими в одной плоскости. Случай этот находит наиболее частое применение; сверх того выводы, относящиеся к силам в одной плоскости, могут быть применены к значительному числу случаев действия сил в пространстве, т. е. к силам, не лежащим в одной плоскости.

В результате техник в огромном большинстве случаев может довольствоваться знанием статики на плоскости, которые проще статики в пространстве. Изучение последней составляет следующую ступень в прохождении курса теоретической механики.



ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Статика.

ГЛАВА I.

СИЛЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ.

3. Понятие о силах. Под именем силы разумеют причину, стремящуюся произвести движение или внести изменение в существующее движение тела. Ясное представление механического характера о силе получается у нас при наблюдении или ощущении нами растяжения, сжатия, при явлениях притягивания или отталкивания и в других случаях. Если мы принуждены тянуть какой-либо груз за канат, то мы получаем понятие о силе сопротивления в связи с большей или меньшей величиной этого сопротивления. Если встречаемое сопротивление больше усилия, развиваемого нами, мы не в состоянии сдвинуть тело.

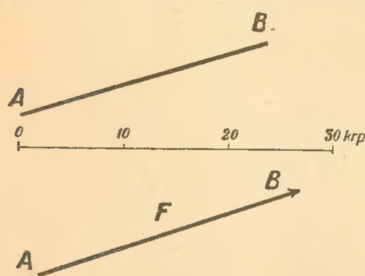
4. Измерение сил. Наиболее распространенная из сил — сила тяжести, благодаря которой все тела стремятся падать на землю. Сила, с которой земля притягивает к себе всякое тело, измеряется весом этого тела. Этой силой пользуются для измерения различных других сил; с ней сравнивают другие силы, применяя для этой цели пружинные весы и пружинные динамометры (силомеры).

Для измерения сил в различных странах приняты различные единицы и системы мер. В России — фунт, пуд и др.; в большинстве стран Западной Европы применяется метрическая система мер с основной единицей — граммом; в Америке и Англии

— английские меры, причем английский фунт равен около 1,1 русского фунта. Ниже мы будем пользоваться преимущественно метрической системой. В целях сокращения письма приняты сокращенные обозначения единиц, чего мы придерживаемся в настоящем руководстве; так, метр обозначается через м., сантиметр — см., грамм — гр., килограмм — кгр., фунт — фн. и т. д. Просим читателя придерживаться этих обозначений, как наиболее распространенных в настоящее время.

5. Направление и точка приложения силы. Графическое изображение силы. Из повседневной практики мы знаем, что действия сил на тела могут различаться по величине и направлению; так, напр., мы можем толкнуть шар, лежащий на земле, в том или другом направлении и с большим или меньшим усилием. Кроме того мы можем приложить наше усилие к той или другой точке шара. Сообразно с этим для полного определения силы необходимо указать: 1) точку приложения силы, 2) направление силы и 3) величину ее.

На чертежах силы изображают отрезками прямых линий (фиг. 1); так, длина отрезка AB, изображающего некоторую силу F, должна равняться в определенном масштабе числу единиц, заключающихся в данной силе. Если, напр., один сантиметр (см.) примем за 10 килограммов (кгр.), то в случае силы F, равной 25 килограммам (кгр.) отрезок AB должен иметь длину $25 : 10 = 2{,}5$ сантиметра (см.). Если точкой приложения F будет точка A (фиг. 1) и сила будет направлена от A к B, то это обозначают стрелкой на конце силы. В результате мы будем иметь на чертеже полное изображение силы F, т. е. 1) точку приложения ее — A, 2) направление силы — от A к B и 3) величину силы — AB.



Фиг. 1. Графическое изображение силы.

6. Вопросы и задачи.

1. В чем состоит главное содержание механики?
2. Что называется абсолютно твердым телом?
3. Что такое сила и как она проявляется?
4. Что такое сила тяжести?
5. Какими единицами измеряются силы?
6. Указать данные, вполне определяющие силу.
7. Представить графически силу 20 кгр., образующую угол 30° с горизонтом и направленную вниз. Взять масштаб 5 кгр. в 1 см.

ГЛАВА II.

СЛОЖЕНИЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ В ОДНОЙ ТОЧКЕ.

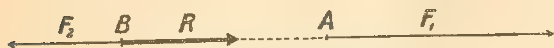
7. Понятие о сложении сил. Силы составляющие и равнодействующая. Если мы приложим к покоящемуся телу какую-либо силу, то результат действия силы может указать на направление ее. Но вопрос осложняется в том случае, если на тело действует несколько сил. Ясно, что тело, находящееся в покое и могущее двигаться, придет в движение по одному определенному направлению. Но такое движение может быть получено путем приложения к телу одной силы. Силу, которая производит на тело то же действие, что и данная совокупность или, как говорят, система сил, называют равнодействующей силой, а все силы данной системы — составляющими. Так, напр., возьмем двух рабочих, поднимающих груз по вертикальному направлению. Если каждый из них при этом развивает усилие в 50 кгр. (составляющие силы), то соединенное усилие обоих будет 100 кгр. (равнодействующая сила). Очевидно, одна сила в 100 кгр. производит то же действие, что и две силы по 50 кгр., если они направлены в одну сторону.

Действие, посредством которого по нескольким составляющим силам находят их равнодействующую, называется сложением сил; обратное действие, состоящее в нахождении двух или нескольких сил, равноценных в механическом смысле, т. е. в отношении производимого ими действия, с данной силой, называют разложением сил.

Может показаться, что разлагая одну силу на две, мы усложняем вопрос; но если выбрать соответствующие направления сил, то часто в систему нескольких сил мы можем внести существенное упрощение, как то покажем дальше; вместо сил, направленных крайне разнообразно, мы получим силы, действующие всего лишь по двум направлениям, а о действии каждой группы таких сил легко сделать заключение.

8. Сложение сил, действующих по одной прямой. В примере, приведенном в предыдущем параграфе, мы указали, что если две силы действуют по одной прямой и в одну сторону, то равнодействующая равна сумме их. Точно так же складываются несколько сил, действующих по одному и тому же направлению, а потому: равнодействующая двух или нескольких сил, действующих по одной прямой в одну и ту же сторону, равна сумме сил.

Если две силы действуют по одной прямой, но направлены в разные стороны, то равнодействующая их равна разности обеих сил и направлена в сторону большей силы.



Фиг. 2. Сложение сил, направленных по одной прямой.

Так, напр. (фиг. 2), если нам даны силы: $F_1 = 15$ кгр. и $F_2 = 8$ кгр., то равнодействующая их R равна $15 - 8 = 7$ кгр. Точка приложения этой силы может быть взята где-либо на прямой, совпадающей с ее направлением, так как каждая сила может быть перенесена в любую точку по линии действия ее (в абсолютно твердом теле).

Если имеем несколько сил, действующих по одной прямой, то равнодействующая их равна алгебраической сумме сил.

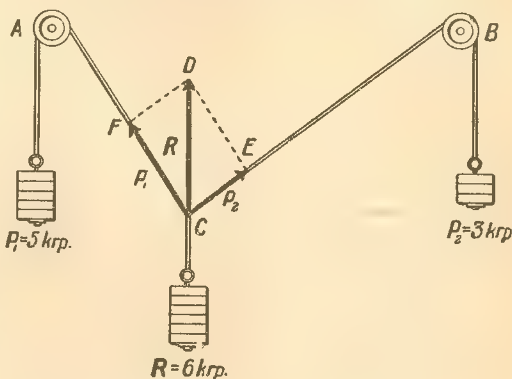
Так, если даны силы: $F_1, F_2, F_3, \ldots$ и т. д., то $R = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ или сокращенно

$$R = \Sigma F,$$

где греческая буква Σ (сигма) обозначает алгебраическую сумму всех данных сил. Обыкновенно, силам, действующим в одну сторону, приписывают знак $+$ (плюс), а в другую знак $-$ (минус).

9. Пересекающиеся силы. Параллелограмм сил. Для пояснения того, как находится равнодействующая двух пересекающихся сил, рассмотрим следующий пример (фиг. 3): укрепим два небольших блока A и B и перекинем через них веревку, привесив к ней грузы, указанные на чертеже. Поместим кусок плотного картона позади веревки и проведем на нем отрезок прямой, параллельной CF и равный 5 кгр., в некотором масштабе. Таким же образом начертим отрезок CE, измеряющий $P_2 = 3$ кгр. в том же масштабе. Строим параллелограмм $CFDE$, проводя ED параллельно CF и FD параллельно CE. Измеряя отрезок CD в том же масштабе, мы найдем его равным 6 кгр. (весу груза R). Кроме того линия CD вертикальна. Следовательно, силы $P_1 = CF$ и $P_2 = CE$ уравновешиваются вертикальной силой, действующей в точке C и равной 6 кгр. Эта сила могла бы удер-

жать от падения тело весом в 6 кгр. Эта сила, направленная вверх, является равнодействующей; сила же, действующая вниз и равная то же 6 кгр, уравновешивает данные силы. Мы видим, что все силы лежат в одной плоскости.

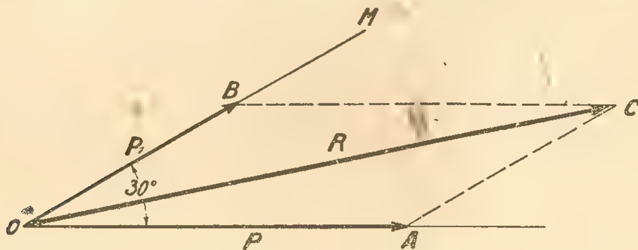


Фиг. 3. Параллелограмм сил.

Изменяя величины грузов и длины веревок, читатель может найти равнодействующую для различных сил, причем каждый раз будет подтверждаться следующее правило: равнодействующая двух пересекающихся сил выражается по величине и направлению диагональю параллелограмма, две смежные стороны которого представляют по величине и направлению соответственно данные силы.

Пользуясь этим правилом, не трудно решить графически следующие задачи: 1) найти равнодействующую по двум данным, составляющим силам; 2) разложить равнодействующую на две составляющие; 3) найти величины составляющих, направления которых даны.

Вместо параллелограмма сил можно для нахождения равнодействующей строить треугольник. Так, из фиг. 4 мы видим, что силы P_1, P и равнодействующая их R образуют треугольник OBC. Стрелки на OB и $BC = OA$ указывают,



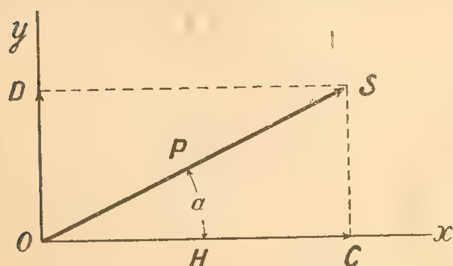
Фиг. 4. Треугольник сил.

куда действует каждая из сил. Если мы будем двигаться от O к B и далее к C, то будем идти по направлению стрелок. Сила R, выраженная по величине и направлению стороною OC, идет навстречу силам P_1 и P. В треугольнике OBC такую сторону называют замыкающей стороной. Отсюда выводим:

равнодействующая двух пересекающихся сил выражается по величине и направлению замыкающей стороной треугольника, другие две стороны которого суть составляющие силы.

На данном прямолинейном отрезке можно построить произвольное число треугольников или соответственно параллелограммов, а потому данная сила может быть разложена произвольно на две других силы. Разложение становится определенным, если будут даны: 1) величины сил, или 2) направления их, или 3) величина и направление одной из составляющих. Предлагаем читателю проделать такие примеры.

10. Составляющие силы, образующие прямой угол друг с другом. Частным случаем сложения и разложения сил, наиболее часто встречающимся в приложениях, является тот, когда составляющие силы образуют друг с другом прямой угол. Пусть Ox и Oy (фиг. 5) представляют собою горизонтальную и вертикальную линии, проведенные через точку приложения O силы P, длина которой выражается отрезком OS. Составляющие силы P графически найдем подобно описанному выше, для чего из точки S проведем линию SC, параллельную OD, или, что то же, опустим перпендикуляр SC на линию Ox. Мы получим отрезок $OC = H$, длина которого будет горизонтальной составляющей силы P. Таким же образом длина отрезка $OD = V$ представляет вертикальную составляющую силы P. Каждая из сил H и V не может быть больше данной силы P.



Фиг. 5. Прямоугольник сил.

Выразим посредством формул зависимость между силой P и ее составляющими H и V. В такие формулы вводят обыкновенно угол, образуемый данной силой P с горизонтальной линией Ox, причем пользуются тригонометрическими величинами этого угла. Если назовем этот угол через a, то отношение $SC : OS$ или $V : P$ называют **синусом** (sinus, что обозначают короче — sin) данного угла, т. е. $V : P = \sin a$, откуда

$$V = P \sin a \qquad (1)$$

Отношение $OD : OS$ называют **косинусом** угла (cosinus или, сокращенно, cos), а потому $H : P = \cos a$ откуда

$$H = P \cos a \qquad (2)$$

Существуют особые таблицы синусов и косинусов для углов, выраженных в градусах*); при помощи этих таблиц можно по углу a найти его cos и вычислить по H или V силу P или наоборот. Такая таблица для углов, разнящихся на один градус приложена в конце книги.

В первом столбце таблицы тригонометрических величин (см. приложение) указаны углы от 0° до 45°; углы от 45° до 90° даны в правом столбце таблицы и идут, увеличиваясь, снизу вверх. К последним углам относятся заголовки внизу страницы. Таким образом:

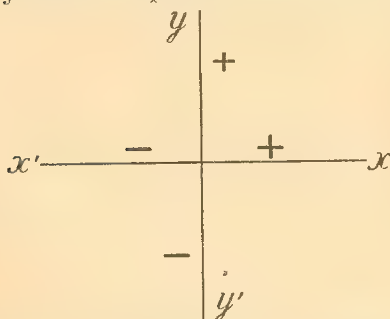
$$\cos 20^0 = 0{,}9397 \qquad \sin 0^0 = 0$$
$$\sin 65^0 = 0{,}9063 \qquad \cos 0^0 = 1$$
$$\cos 78^0 = 0{,}2079 \qquad \sin 90^0 = 1$$
$$\sin 39^0 = 0{,}6293 \qquad \cos 90^0 = 0.$$

Синусы с увеличением угла увеличиваются, а косинусы уменьшаются. $\cos 67^1/_2{}^0$ равен приблизительно полусумме $\cos 67^0$ и $\cos 68^0$ или $\cos 68^0$ плюс половина разности между $\cos 67^0$ и $\cos 68^0$, т. е. $0{,}3746 + 0{,}5(0{,}3907 - 0{,}3746) = 0{,}3826$; $\sin 31^0 30' = 0{,}5150 + 0{,}5 \times 0{,}0149 = 0{,}5225$.

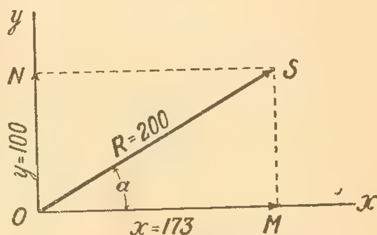
Если будут даны обе силы H и V, то

$$P = \sqrt{H^2 + V^2} \qquad (3)$$

Две взаимно перпендикулярные линии или оси, по направлению которых раскладывают силы, пересекаются так, как указано в фиг. 6.



Фиг. 6. Положительные и отрицательные направления сил.



Фиг. 7. См. пример 1.

Силы, направленные от точки пересечения осей или начала осей вправо или вверх, считаются положительными (+), а силы, действующие вниз или влево, отрицательными (—).

Примеры. 1. Сила $R = 200$ кгр. (фиг. 7) образует угол 30° с горизонтальной линией. Найти горизонтальную и вертикальную составляющие этой силы.

Проводим взаимно перпендикулярные линии Ox и Oy (фиг. 7), строим угол $a = 30^0$ и откладываем на стороне его OS

---

*) См., напр., Э. Норрис и Р. Крэго, Основы алгебры, геометрии и тригонометрии, перевод С. И. Кошкина.

силу $R = OS = 200$ кгр. Отрезок $OM = X$ представит горизонтальную составляющую, а $ON = Y$ — вертикальную составляющую.

Отрезки OM и ON могут быть найдены или измерением их в том же масштабе, что и сила R, или же из у –ний (1) и (2), примененных к данному случаю. Получим: $X = R\cos a = 200\cos 30^0 = 200 \times 0{,}866 = 173$ кгр. и $Y = R \times \sin 30^0 = 200 \times 0{,}5 = 100$ кгр.

2. Даны силы $X = 173$ кгр. и $Y = 100$ кгр. Найти равнодействующую и направление ее.

В фиг. 7 имеем прямоугольный треугольник OSM; поэтому

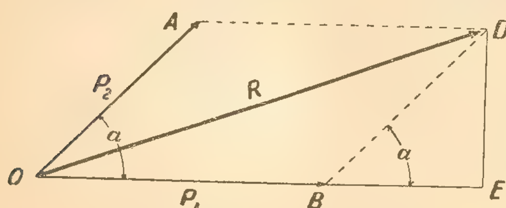
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{173^2 + 100^2} = 200 \text{ кгр.}$$

Синус угла a равен $100 : 200 = 0{,}5$; по таблицам синусов найдем угол $a = 30^0$.

11. Вопросы и задачи.

1. Что называется равнодействующей двух или нескольких сил?
2. Что разумеется под сложением сил?
3. В чем состоит правило сложения сил, действующих по одному направлению?
4. На тело действует в одну сторону силы: 5, 10 и 25 кгр., а в противоположную: 8 и 14 кгр. Найти равнодействующую их.
5. Составить чертеж, подобный фиг. 3 (§ 9) для грузов $P_1 = 10$ кгр., $P_2 = 20$ кгр. и $R = 25$ кгр.
6. В чем состоит правило параллелограмма сил?
7. Горизонтальная составляющая силы равна — 30 кгр., а вертикальная — 40 кгр. Найти направление и величину силы*).
8. Может ли равнодействующая двух взаимно перпендикулярных сил быть равна нулю?
9. Какую силу нужно приложить к телу, чтобы получить равнодействующую равную нулю в задаче 7?

12. Зависимость между равнодействующей и составляющими силами при произвольном направлении последних. Выше (§ 9) было указано решение вопросов, относящихся к пересекающимся силам при произвольном направлении их, графическим путем. Приведем решение тех же вопросов посредством вычислений.



Фиг. 8. Параллелограмм сил.

В фиг. 8 имеем две силы P_1 и P_2, приложенные к точке O и действующие под углом a одна к другой. Строим параллелограмм $OADB$, в котором диагональ $OD = R$ есть искомая равнодействующая сил P_1 и P_2.

---

*) Масштаб следует брать таким, чтобы чертеж получился достаточно ясным; в данном случае можно взять, напр., 10 кгр. в 1 см.

Из точки D опускаем перпендикуляр DE на продолжение линии OB. Получим прямоугольный треугольник OED. Имеем:

$R^2 = OE^2 + DE^2 = (OB + BE)^2 + DE^2$. Но $DE = BD \times \sin\alpha = P_2\sin\alpha$; $OB = P_1$ и $BE = BD \times \cos\alpha = P_2\cos\alpha$; следовательно, $OE = OB + BE = P_1 + P_2\cos\alpha$.

Вводя эти значения в выражение для R^2, получим:

$R^2 = (P_1 + P_2\cos\alpha)^2 + (P_2\sin\alpha)^2 = P_1^2 + 2P_1P_2\cos\alpha + P_2^2\cos^2\alpha + P_2^2\sin^2\alpha = P_1^2 + 2P_1P_2\cos\alpha + P_2^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$.

Так как (см. дальше)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

то

$$R^2 = P_1^2 + 2P_1P_2\cos\alpha + P_2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Отсюда находим:

$$R = \sqrt{P_1^2 + 2P_1P_2\cos\alpha + P_2^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Покажем, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Из треугольника OSC (фиг. 5) имеем: $SC^2 + OC^2 = OS^2$; делим это равенство на OS^2:

$$\frac{SC^2}{OS^2} + \frac{OC^2}{OS^2} = 1,$$

или

$$\left(\frac{SC}{OS}\right)^2 + \left(\frac{OC}{OS}\right) = 1,$$

или

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Для некоторых частных значений формула (5) приобретает более простой вид; пусть, напр., силы P_1 и P_2 образуют друг с другом угол $\alpha = 90^0$; при этом (см. таблицу тригонометрических величин): $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, а потому

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2},$$

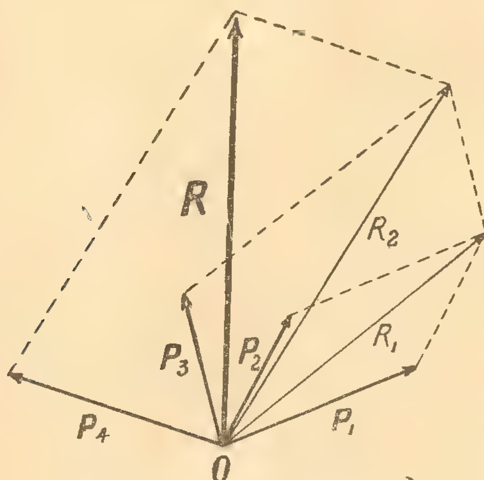
что следует также непосредственно из свойства прямоугольного треугольника.

Из параллелограмма сил можно видеть, что равнодействующая всегда лежит ближе к большей силе.

13. Определение равнодействующей по составляющим силам, разложенным по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Третий, часто самый простой, метод нахождения равнодействующей двух или нескольких сил заключается в том, что слагаемые силы предварительно разлагают на их вертикальные и горизонтальные составляющие и находят в отдельности алгебраические суммы тех и других (вертикальных и горизонтальных составляющих). В таком случае все данные силы могут быть заменены двумя силами: горизонтальной и вер-

тикальной, а равнодействующая этих двух сил может быть найдена из уравнения (3). Применение этого способа показано далее на одном из примеров.

14. Равнодействующая нескольких пересекающихся сил. Если дано несколько сил P_1, P_2, P_3, P_4, направления которых пересекаются в одной точке (фиг. 9), то равнодействующую их можно найти, применяя последовательно правило параллелограмма или треугольника.



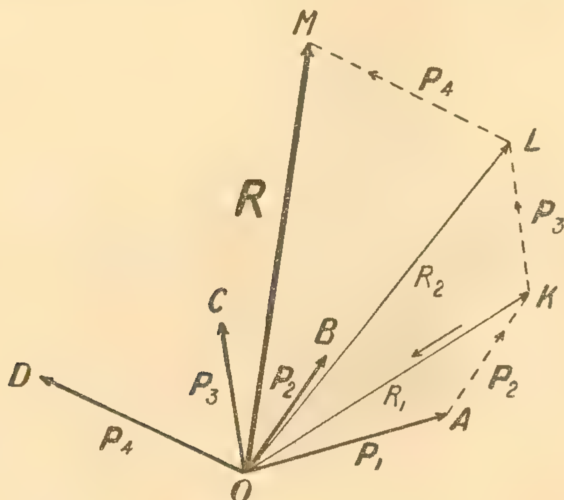
Фиг. 9. Сложение нескольких сил.

Сложением сил P_1 и P_2 найдем их частную равнодействующую R_1. Эта сила, сложенная с P_3, даст равнодействующую R_2. Сложением R_2 с P_4 найдем равнодействующую всех данных сил R.

Не трудно видеть, что найти эту равнодействующую можно последовательным построением треугольников (фиг. 10) согласно с представленным в следующей таблице:

Слагаемые силы	Треугольник	Равнодействующая
P_1 и P_2	OAK	$OK = R_1$
R_1 и P_3	OKL	$OL = R_2$
R_2 и P_4	OLM	$OM = R$

Рассматривая многоугольник $OAKLM$, видим, что стороны его: OA, AK, KL и LM равны данным силам, пристроенным одна к другой и идущим в одном направлении; равнодейству

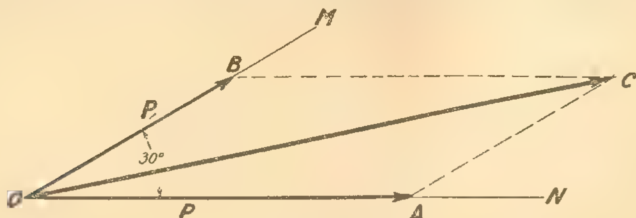


Фиг. 10 Многоугольник сил.

ющая их R замыкает ломанную линию $OAKLM$ и представляет таким образом замыкающую сторону в многоугольнике $OAKLM$. Основываясь на этом, можем высказать следующее правило: **равнодействующая нескольких сил, пересекающихся в одной точке, выражается по величине и направлению замыкающей стороной многоугольника, стороны которого представляют данные силы.**

Не трудно обнаружить, что порядок сложения сил не оказывает влияния на получаемый результат. Предлагаем читателю показать это.

15. Пример применения различных способов сложения сил. Даны две силы: 120 кгр. и 80 кгр., действующие



Фиг. 11. К § 15.

под углом 30° друг к другу. Найти равнодействующую их каждым из трех разобранных выше методов.

1. Графическое решение. Проводим горизонтальную линию OA (фиг. 11) и на ней в определенном масштабе отложим силу $P = 120$ кгр. Строим при точке O угол в 30^0 и обозначаем направление второй стороны его OM. На этой линии откладываем в прежнем масштабе силу $P_1 = 80$ кгр. Строим параллелограмм и проводим его диагональ R. Длина этой диагонали в принятом масштабе даст искомую равнодействующую силу. Измерив ее, находим $R = 193$ кгр.

2. Алгебраическое решение. Косинус угла 30^0 равен 0,866 или $\cos 30^0 = 0{,}866$. Подставляя эту величину и $P = 120$ и $P_1 = 80$ в уравнение (5), получим:

$R^2 = 120^2 + 80^2 + 2 \times 0{,}866 \times 120 \times 80 = 14400 + 6400 + 1{,}732 \times 9600 = 37427.$

$$R = \sqrt{37427} = 193{,}4 \text{ кгр.}$$

Это значение немного больше полученного графическим путем. Но, если бы мы приняли для графического метода больший масштаб, то ошибка была бы уменьшена и значения совпали бы.

3. Решение разложением на составляющие. Горизонтальная составляющая силы P равна 120 кгр., а вертикальная 0. Горизонтальная составляющая силы P_1

$$80 \times \cos 30^0 = 80 \times 0{,}866 = 69{,}28 \text{ кгр.},$$

а вертикальная

$$80 \times \sin 30^0 = 80 \times 0{,}5 = 40 \text{ кгр.}$$

Из этого следует, что сумма вертикальных составляющих будет $0 + 40 = 40$ кгр., а сумма горизонтальных: $120 + 69{,}28 = 189{,}28$. Так как силы действуют под углом 90^0 одна к другой, то $R^2 = P^2 + P_1^2$. Подставляя сюда полученные значения, найдем

$$R^2 = 40^2 + 189{,}28^2 = 1600 + 35827 = 37427.$$

Следовательно,

$$R = \sqrt{37427} = 193{,}4 \text{ кгр.}$$

Полученное таким способом значение, очевидно, должно быть точно равно полученному из общего уравнения (5).

16. Вопросы и задачи.

1. Указать различные способы нахождения равнодействующей.

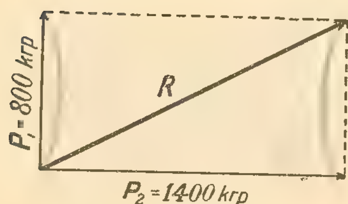
2. Найти равнодействующую R сил P_1 и P_2 (фиг. 12) и найти угол между R и P_2.

3. Даны силы, представленные в фиг. 13. Вычислить горизонтальную и вертикальную составляющие каждой из них и те же составляющие равнодействующей R и самую силу R, если $P_1 = P_2 = P_3 = 100$ кгр.

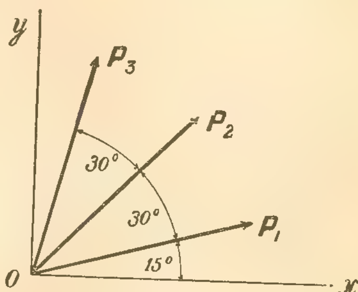
4. Решить тот же вопрос графически. Сравнить полученные результаты.

5. Указать те частные виды, которые принимают уравнение (5) для сил P_1 и P_2, образующих углы: 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 180^0. Представить результаты в виде таблицы.

6. Корчевание пней производится двумя запряжками, причем одна развивает тягу в 400 кгр., а другая 600 кгр. Угол между ними 45°. Чему равно равнодействующее усилие и как оно направлено? На сколько оно уменьшится, если угол увеличится до 90°.

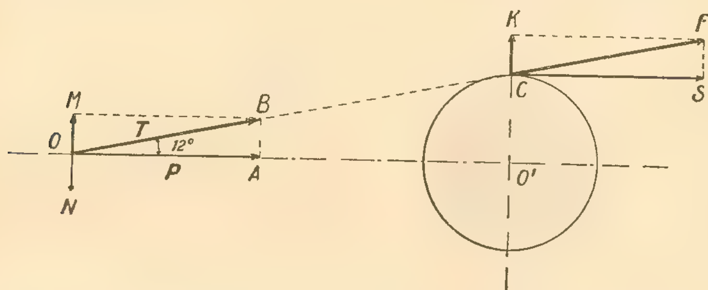


Фиг. 12. К задаче 2.



Фиг. 13. К задаче 3.

7. В фиг. 14 представлен шатун OC паровой машины, причем с продолжением штока поршня OO' (осью машины) он образует угол в 12°. Если давление пара на поршень равно 6.000 кгр., то чему равно усилие OB вдоль шатуна?



Фиг. 14. К задаче 7.

8. Определить давление ON, которое в предыдущей задаче производит ползун O на параллели (направление их параллельно OO').

9. Найти силу CS, вращающую кривошип $O'C$ ($CF = OB$).

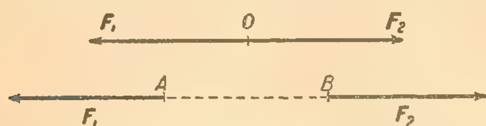
10. Четыре силы действуют на данное тело в точке O. Первая направлена горизонтально и равна 50 кгр. Вторая образует с первой угол 30° и равна 40 кгр.; третья образует с первой угол 60° и равна 60 кгр.; четвертая составляет с первой угол 120° и равна 45 кгр. Найти величину и направление равнодействующей.

ГЛАВА III.

РАВНОВЕСИЕ СИЛ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ В ОДНОЙ ТОЧКЕ.

17. Понятие о силах, находящихся в равновесии. Пусть какое-либо тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Если на него действует такая совокупность или система сил, что они не изменяют покоя или указанного движения тела, то про такую систему сил говорят, что силы ее находятся в равновесии или взаимно уравновешиваются. Возьмем, напр., ведро с водой, стоящее на горизонтальной плоскости. Вес ведра является силой, действующей вниз. Так как ведро находится в равновесии, то должна быть сила, уравновешивающая указанную. Такой силой будет действие со стороны опоры на ведро, что можно заменить силой, действующей вверх. Эти две силы направлены по одной и той же прямой, равны между собой и противоположны друг другу по направлению.

Наименьшее число сил, необходимых для равновесия тела — две; такие две силы F_1 и F_2 (фиг. 15): 1) имеют общую точку приложения O или направлены по одной прямой AB, 2) равны по величине $(F_1 = F_2)$ и 3) противоположны по направлению.

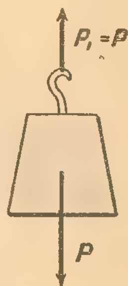


Фиг. 15. Силы F_1 и F_2 $(F_1 = F_2)$ находятся в равновесии.

До тех пор, пока тело остается в покое, очевидно, что силы взаимно уравновешиваются. Но те же приложенные к нему силы будут также уравновешены, если тело будет находиться в движении, так как по закону или началу механики, высказанному Ньютоном, действие сил на тело не зависит от состояния последнего, т. е. будет ли тело в покое или в движении.

18. Начало равенства действия и противодействия (начало реакции). При решении вопросов равновесия сил приходится считаться с действием тел друг на друга, выражающимися силами соответственных величин. Силы эти подчиняются закону

или началу равенства действия и противодействия, высказанному Ньютоном и заключающемуся в следующем: если какое-либо тело действует на другое тело с некоторой силой, то второе действует на первое с той же силой по величине, но обратно направленной. Если мы давим рукой на стол, то мы испытываем со стороны стола давление той же величины. Однородный шар, лежащий на горизонтальной плоскости, подвержен со стороны плоскости силе, равной его весу. Сила эта направлена обратно весу шара, т. е. вверх, и приложена к шару в точке касания его с плоскостью. Если мы присоединим к повозке пружинные весы и потянем за них веревкой, на конце которой будут другие пружинные весы, то те и другие будут показывать одинаковое усилие тяги.



Фиг. 16.

Не следует упускать из виду того, что силы, действующие по началу реакции между телами, приложены к разным телам. Так, груз, подвешенный на канате (рис. 16), стремится растянуть канат, а канат, в свою очередь, действует на груз; действие это измеряется силой, являющейся силой противодействия или реакции, равной весу груза, но обратно направленной, т. е. снизу вверх.

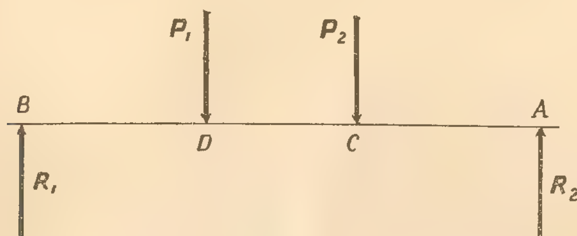
19. Тела свободные и несвободные. В приведенных примерах сосуд на столе и груз, привешенный на канате, ограничены в своих движениях: оба не могут перемещаться вниз. Такие тела называются несвободными. Применимы ли к ним все соображения, относящиеся к равновесию сил? Для того, чтобы это можно было сделать, нужно учесть действие причин, ограничивающих свободу движения тела, или так называемых сил связи; иначе говоря, заменить эти причины соответственным образом подобранными силами. После этого тело может быть рассматриваемо как свободное, и ко всей совокупности сил вместе с силами связи могут быть применены все приводимые далее соотношения. Поясним это на частном случае.

Возьмем балку AB (фиг. 17), лежащую на двух горизонтальных опорах A и B и нагруженную грузами P_1 и P_2. Балка — тело несвободное, так как она ограничена в своем движении сверху вниз опорами. Учесть действие опор или реакции опор в виде определенных сил необходимо, так как только при наличии таких сил балка может быть в покое.

Реакция, проявляющаяся в левой опоре B, должна быть заменена некоторой силой R_1, направленной вверх; а реакция опоры A заменяется силой R_2*). Приложив к балке силы R_1 и R_2,

*) Приемы, посредством которых определяются эти силы, будут рассмотрены ниже.

равноценные в механическом смысле присутствию опор, мы можем откинуть последние и всю балку рассматривать как свободное тело, находящееся в равновесии под действием сил: P_1, P_2, R_1 и R_2.



Фиг. 17. Реакции опор балки.

При решении всякой задачи, в которой приходится иметь дело с несвободными телами, читатель должен произвести предварительно анализ этой задачи, ввести в число сил силы реакции и затем решать ее так, как если бы он имел дело с свободным телом. Подобную замену нужно сделать в случае груза, висящего на канате (сила реакции каната равна весу груза), сосуда на горизонтальной опоре (реакция также равна весу сосуда), повозки, которую передвигают лошади (реакция или сопротивление в точках касания колес с грунтом равно тяге лошадей при равномерном движении) и т. д.

20. Условие равновесия сил, пересекающихся в одной точке. Выше было рассмотрено правило нахождения равнодействующей пересекающихся сил (§ 14). Не трудно видеть (фиг. 10), что если данная система сил приводится к равнодействующей R, то мы можем уравновесить последнюю, приложив к телу равную ей силу, но обратно направленную.

Если нам известно, что какая-либо система сил, приложенных к одной точке или пересекающихся в одной точке, находится в равновесии, то для этого необходимо, чтобы их равнодействующая равнялась нулю, т. е. $R = 0$.

В случае равновесия данной системы сил каждая из сил этой системы уравновешивает все остальные; она, следовательно, равна по величине и противоположна по направлению равнодействующей остальных сил.

Силы, как мы знаем, могут быть даны разными способами: непосредственно своими величинами и направлениями (фиг. 8) или своими составляющими по двум взаимно перпендикулярным направлениям (фиг. 7).

Найдем условия равновесия для каждого из указанных способов; остановимся сначала на последнем.

21. Условия равновесия сил, данных составляющими их по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Пусть на тело действует система сил P_1, P_2, P_3 и т. д., данных их составляющими по направлениям Ox и Oy, причем составляющие эти будут:

для силы P_1 .... X_1 и Y_1,
» » P_2 .... X_2 и Y_2,
» » P_3 .... X_3 и Y_3 и т. д.

Если данная система сил находится в равновесии, то равнодействующая R всех сил системы должна быть равна нулю, т. е. должно быть соблюдено условие: $R = 0$.

Обозначая составляющие силы R по осям Ox и Oy через X_0 и Y_0, имеем:

$$R^2 = X_0^2 + Y_0^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

А так как обе величины X_0 и Y_0 суть величины положительные, то R может быть равно нулю только в случае, если

$$X_0 = 0 \text{ и } Y_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

а так как

$$X_0 = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = \Sigma X \text{ и}$$
$$Y_0 = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = \Sigma Y,$$

то должно быть:

$$\Sigma X = 0 \text{ и } \Sigma Y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

Это суть уравнения равновесия сил, приложенных к одной точке, т. е. для равновесия сил, лежащих в одной плоскости и пересекающихся в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы горизонтальных и вертикальных составляющих данных сил были в отдельности равны нулю.

22. Определение силы, уравновешивающей данную систему сил, пересекающихся в одной точке. Для того, чтобы найти силу, уравновешивающую данную систему сил, по ее составляющим необходимо: 1) выделить все силы, действующие на тело и входящие в данную систему, 2) разложить эти силы на их горизонтальные и вертикальные составляющие, 3) определить равнодействующую каждых из найденных таким образом сил, 4) сложить эти частные равнодействующие в общую равнодействующую. Искомая сила равна ей по величине, но противоположна по направлению.

Если речь идет о равновесии тела, то берем все силы, действующие на него, со включением реакций, и поступаем по только что сказанному.

Для пояснения возьмем пример центробежного регулятора, изображенного в фиг. 18. Регулятор состоит из вертикального стержня, на котором в C укреплены два подвеса с шарами A и B

Фиг. 18. Равновесие регулятора.

на концах их. При передвижении шаров прикрепленные к ним тяги M и N перемещают муфту S, от которой сделан привод к паровпускному клапану. Если машина увеличит свою скорость, шары разойдутся и поднимут муфту S, которая посредством привода прикроет впуск пара, что будет содействовать восстановлению нормальной скорости вращения машины; шары снова опустятся в прежнее положение; при такой скорости они остаются на постоянном расстоянии от оси.

Фмг. 19. К фиг. 18.

Силы, действующие на правый шар, таковы: 1) вес его P, изображаемый отрезком OE (фиг. 19); 2) сила T (отрезок OL), направленная по оси подвеса и выражающая действие подвеса на шар. Если мы сложим две указанные силы по правилу параллелограмма, то равнодействующая их OH (центростремительная сила) будет при установившемся ходе машины равна по величине центробежной силе F (отрезок OA), но направлена обратно ей.

Проведем из точки O линию равную P и из конца ее E линию EH, параллельную T, а из точки O горизонтальную линию до пересечения с EH в точке H. Мы найдем HE — равнодействующую P и T. Сила F направлена обратно и численно равна HE.

23. Вопросы и задачи.

1. Что называется системой сил, находящихся в равновесии?

2. а) Зависит ли действие сил от состояния тела? б) Может ли система сил, не изменяющая состояния покоя тела, изменить его движение?

3. Уравновешиваются ли в с е силы, действующие на тело, находящееся в состоянии покоя?

4. Я давлю кистью руки на стол с усилием 10 фн. Указать точку приложения и направление моего усилия и реакции стола на мою руку.

5. В чем состоит начало реакции?

6. Что называется свободным телом?

7. Какой прием применяют, чтоб рассматривать несвободное тело как свободное?

8. В чем состоит условие равновесия сил, пересекающихся в одной и той же точке, если каждая из сил дана составляющей по двум осям?

24. Треугольник сил. Мы видели, что равнодействующая двух пересекающихся сил (§ 9) выражается по величине и направлению замыкающей стороной треугольника, построенного на данных силах. Сила же, уравновешивающая две данные силы, равна равнодействующей их (§ 22), но обратно направлена. Следовательно, напр., сила обратная R_1 (фиг. 10) уравновешивает силы P_1 и P_2. Если мы изменим направление R_1 на обратное (стрелка сбоку силы), то в треугольнике OAK эти три уравновешивающиеся силы будут течь по одному направлению или идти в круговом порядке. То же получим в треугольнике OEH (фиг. 19), если дадим HO направление от H к O. Треугольники замыкаются сами собою данными силами. Отсюда выводим правило:

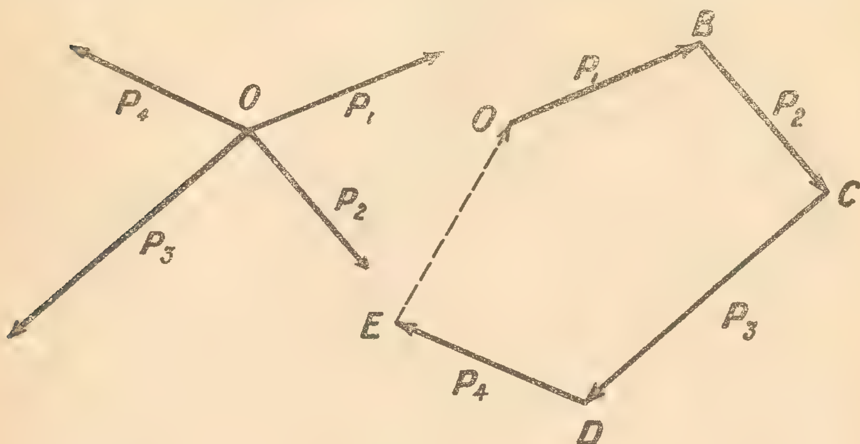
Е с л и т р и с и л ы, д е й с т в у ю щ и е н а д а н н у ю т о ч к у и л и, ч т о т о ж е, т р и с и л ы, н а п р а в л е н и я к о т о р ы х п е р е с е к а ю т с я в д а н н о й т о ч к е, з а м ы к а ю т с я с а м и с о б о ю, о б р а з у я т р е у г о л ь н и к, т о т а к и е с и л ы н а х о д я т с я в р а в н о в е с и и.

25. Многоугольник сил. Из правила треугольника путем, подобным описанному выше при нахождении равнодействующей нескольких сил (§ 14), выводится правило м н о г о у г о л ь н и к а с и л, выражаемое так:

Е с л и с и л ы, п р и л о ж е н н ы е к д а н н о й т о ч к е, о б р а з у ю т з а м к н у т у ю ф и г у р у (м н о г о у г о л ь н и к), т о т а к и е с и л ы в з а и м н о у р а в н о в е ш и в а ю т с я, и обратно: е с л и н е к о т о р а я с и с т е м а с и л н а х о д и т с я в р а в н о в е с и и, т о т а к и е с и л ы, в з я т ы е в к р у г о в о м п о р я д к е, о б р а з у ю т м н о г о у г о л ь н и к.

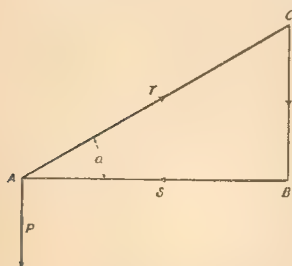
Правила эти, помимо поверки того, находится ли данная система сил в равновесии, позволяют находить равнодействующую двух или нескольких сил, причем может быть избегнута необходимость разлагать силы на их горизонтальные и вертикальные составляющие.

26. Приложение правил треугольника и многоугольника к решению частных вопросов. Пусть имеем данными четыре силы P_1, P_2, P_3 и P_4, действующие на точку O



Фиг. 20. Сила EO уравновешивает систему силы P_1, P_2, P_3 и P_4.

(фиг. 20). Спрашивается, уравновешиваются ли эти силы или нет? Проводим отрезок OB, равный и параллельный силе P_1. Точно так же BC равен и параллелен P_2, CD равен и параллелен P_3 и, наконец, DE равен и параллелен силе P_4. Эти отрезки образуют ломанную линию $OBCDE$, но не замкнутый многоугольник; следовательно, силы не будут взаимно уравновешивающимися. Отрезок OE, соединяющий точку O с точкой E, и направленный или текущий обратно данным силам, т. е. замыкающий многоугольник, представит по величине и направлению равнодействующую данных сил. А тот же отрезок с направлением от E к O будет силой, уравновешивающей всю систему. Проверить это можно последовательным применением правила параллелограмма, присоединив к числу данных сил P_1, P_2, P_3 и P_4 силу EO. Заметим, что, называя силы двумя буквами, идут по направлению силы.

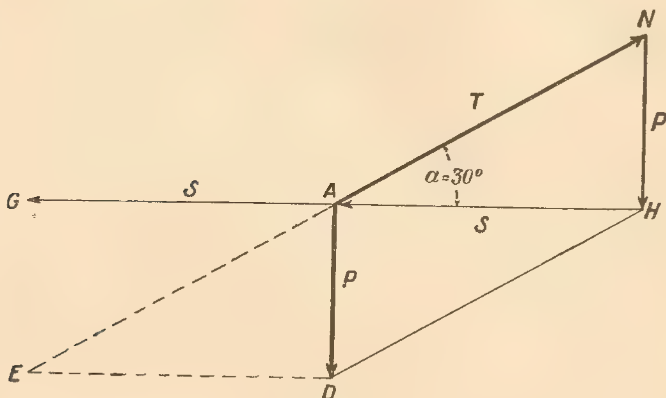


Фиг. 21. Схема стенного крана.

Треугольник ABC в фиг. 21 представляет собою схему стенного крана, причем точки B и C укреплены в вертикальных шарнирах, а A — точка подвеса груза. Груз этот вызывает усилие, растягивающее верхнюю укосину AC и силу, сжимающую AB. Следствием указанных сил являются реакции T и S частей AC и AB на точку A, равные по § 18 численно силам, производимым грузом и стремящимся растянуть AC и сжать AB.

Точка A крана есть точка несвободная, а связанная с AB и AC. Мы можем рассматривать ее, как свободную, если кроме силы P приложим к ней силы T и S. Под действием этих трех сил точка A находится в покое, а потому силы P, T и S уравновешиваются.

В фиг. 22 представлена точка A, рассматриваемая, как



Фиг. 22. К фиг. 21.

свободное тело. Отрезок AD изображает по величине и направлению вес P; AG — направление реакции балки AB и AN — направление реакции укосины. Из точки D проводим линию, параллельную силе T, до пересечения ее с продолжением AG в точке H. Силовой треугольник ADH определяет величины искомых сил T и S, причем $T = DH$ и $S = HA$. Вместо треугольника ADH можно построить другой треугольник AHN или параллелограмм $AEDH$, проводя DE и DH, соответственно параллельные T и S до пересечения с продолжениями их AE и AH в точках E и H. Отрезки EA и HA дадут значения искомых сил T и S, равных численно силам: растягивающей AC (фиг. 21) и сжимающей AB, но обратно направленным.

Пример. Положим, угол α (фиг. 21) равен 30° и нагрузка $P = 1000$ кгр. Каковы усилия, растягивающие укосину AC

и сжимающие балку AB? В треугольнике сил (фиг. 22) угол $NAH = a - 30^0$ и катет $NH = P = 1000$ кгр.;

$$\sin a = \frac{NH}{AN} = \frac{P}{T},$$

откуда

$$T = \frac{P}{\sin a} = \frac{1000}{0,5} = 2000 \text{ кгр.}$$

Силу S находим или из выражения:

$$S = T \cos a = 2000 : 0,866 = 1732 \text{ кгр.},$$

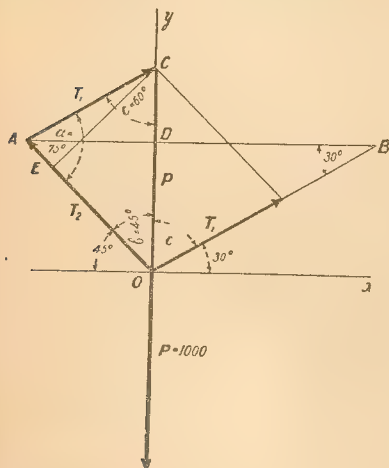
или из выражения:

$$S = \sqrt{T^2 - P^2} = \sqrt{2000 - 1000} =$$

$$= 1000\sqrt{4 - 1} = 1000\sqrt{3} = 1732 \text{ кгр.}$$

Вычисления здесь сравнительно просты потому, что треугольник прямоугольный.

27. Решение вопросов о равновесии сил разными способами. Дан груз P, подвешенный на веревках OA и OB, укрепленных в точках A и B и образующих углы b и c с вертикальной линией Oy (фиг. 23). Найти натяжения веревок T_1 и T_2.



Фиг. 23.

Отложим вертикальный отрезок CO, изображающий в выбранном масштабе груз P, построим на нем треугольник OAC, стороны которого параллельны направлениям веревок OA и OB. В нем сторона OA выражает усилие T_2, которое направлено от O к A; OC равна T_1, направленному от A к C; таким образом все три силы, действующие на точку O, представлены сторонами треугольника OAC, взятыми в круговом порядке, т. е. текущими одна вслед за другой. По построению угол $ACO = COB$, так как AC параллельна OB. Проведем линию CE перпендикулярно к AO; из прямоугольных треугольников ACE и CEO находим:

$$CE = AC \sin a = CO \sin b = T_1 \sin a = P \sin b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7б)$$

отсюда

$$T_1 = P\frac{\sin b}{\sin a}.$$

Подобным же образом, опустив перпендикуляр из O на AC, найдем:

$$T_2 = P\,\frac{\sin c}{\sin a}.$$

Возьмем численный пример (фиг. 23): $P = 1000$ кгр., $b = 45^0$, $c = 60^0$. Так как $a + b + c = 180^0$, то $a = 180^0 - (45^0 + 60^0) = 75^0$. Далее

$$T_1 = P\,\frac{\sin 45^0}{\sin 75^0} = 1000\,\frac{0{,}707}{0{,}966} = 732 \text{ кгр.}$$

и

$$T_2 = P\,\frac{\sin 60^0}{\sin 75^0} = 1000\,\frac{0{,}866}{0{,}966} = 897 \text{ кгр.}$$

Для сравнения различных способов решения вопросов, относящихся к нахождению величин сил, решим рассмотренную задачу посредством разложения сил на горизонтальные и вертикальные составляющие.

Возьмем точку O за начало осей Ox и Oy, направленных соответственно вправо и вверх. Тогда горизонтальная составляющая T_1 равна $T_1\cos 30^0$, а вертикальная: $T_1\sin 30^0$; вертикальная составляющая T_2 равна $T_2\sin 45^0$, а горизонтальная: $-T_2\cos 45^0$, где знак минус показывает, что сила действует влево (см. условие в конце § 8). Горизонтальная составляющая веса P равна $P\cos 90^0 = 0$, а вертикальная: $-P_1$, где минус показывает, что сила P действует вниз.

Так как силы находятся в равновесии, то для горизонтального направления:

$$T_1 \cos 30^0 - T_2 \cos 45^0 + 0 = 0$$

и для вертикального:

$$T_1 \sin 30^0 + T_2 \sin 45^0 - P = 0.$$

Заменяя T_2 во втором у—нии его значением из у ния первого:

$$T_2 = T_1\,\frac{\cos 30^0}{\cos 45^0},$$

получим:

$$T_1 \sin 30^0 + T_1\,\frac{\cos 30^0 \times \sin 45^0}{\cos 45^0} - P = 0.$$

Отношение синуса угла к его косинусу представляет собою величину называемую т а н г е н с о м, который обозначают сокращенно tg*).

Следовательно:

$$T_1 (\sin 30^0 + \cos 30^0 \times \mathrm{tg}\, 45^0) = P,$$

откуда

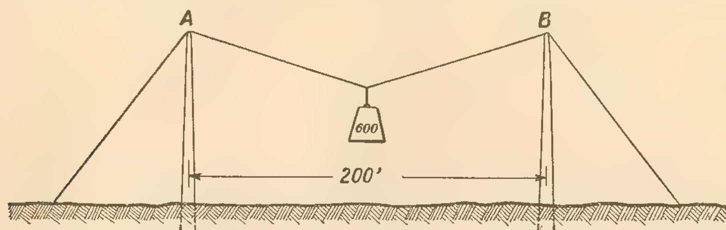
$$T_1 = \frac{P}{\sin 30^0 + \cos 30^0 \times \mathrm{tg}\, 45^0} = \frac{1000}{0{,}5 + 0{,}866 \times 1} = \frac{1000}{1{,}366} = 732 \text{ кгр.}$$

---

*) См. курсы тригонометрии. Здесь же важно знать лишь то, что $\mathrm{tg}\, a = \sin a : \cos a$. Тангенсы даны в той же таблице, где содержатся синусы и косинусы.

Найти T_2 предоставляем читателю.

Из сопоставления обоих приемов решения видим, что первый является в данном случае несколько проще, но за то второй общнее. Во многих случаях в зависимости от способа задания преимущество будет на стороне способа, где приходится иметь дело с горизонтальными и вертикальными составляющими данных сил; это будет, вообще говоря, чаще.



Фиг. 24. К задаче 6.

28. Вопросы и задачи.

1. В чем состоит условие равновесия нескольких сил, пересекающихся в одной точке, называемое многоугольником сил?

2. Две силы 80 и 100 кгр. действуют на тело под углом 60° одна к другой. Найти величину и направление третьей силы, уравновешивающей первые две. Сила в 100 кгр. направлена горизонтально.

3. В фиг. 21 растягивающее усилие T не должно превосходить 50 пуд. Какой наибольший груз может быть подвешен к точке A, если угол a равен 35°?

4. Определить растягивающее усилие в подвесе OC (фиг. 18 и 19), если $P = 40$ фн. и центробежная сила $F = 30$ фн.

5. Какой вид примет треугольник ANH (фиг. 22) при уменьшении груза P вдвое?

6. На проволочном канате длиною 230 фут., протянутого между столбами A и B (фиг. 24), по середине подвешен груз 600 пуд. Найти угол между канатом и столбом и натяжение каната.

7. Определить усилие, растягивающее канат BC (фиг. 25), считая груз $Q = 20$ пуд. и уравновешивающую его силу $P = 20$ пуд. Решить применением треугольника сил.

Фиг. 25. К задаче 7.

8. Найти усилие, сжимающее укосину AB (см. задачу 7).

9. Какое действие производят реакции, необходимые для уравновешивания сил, действующих в BC и AB (фиг. 25)?

10. Взять величины и направления сил, данных условием задачи 10 (§ 16), и заменив равнодействующую силу равной и противоположной ей силой, построить многоугольник сил.

ГЛАВА IV.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИЛЫ.

29. Виды параллельных сил. Сложение двух параллельных сил одинакового направления. Две силы, направления которых не пересекаются, называются *параллельными силами*; ясно, что точки приложения параллельных сил различны. Параллельные силы могут быть направлены в одну и ту же сторону или в разные стороны.

Фиг. 26. Параллельные силы, направленные в одну сторону.

Выведем правило сложения двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону. Даны силы P и Q (фиг. 26). Возьмем на направлениях сил точки A и B и приложим в этих точках две равные по величине силы S_1 и S_2, направленные по прямой AB в разные стороны. Такие силы между собою уравно-

вешиваются, а потому приложение их к телу не изменит действия сил P и Q. Линия AB может быть направлена под произвольным углом к силам P и Q.

Сложим силы P и S_1, а также силы Q и S_2 по правилу параллелограмма; найдем две силы AE и BF. Перенесем эти две силы в точку пересечения их G, где снова разложим их на силы: P и S_1; Q и S_2. Силы S_1 и S_2 взаимно уравновешиваются, и у нас остаются данные силы P и Q; силы эти действуют в другой точке, но совокупное действие их одинаково с действием данных сил в точках A и B. Силы $P = GK$ и $Q = GL$ дадут равнодействующую

$$R = P + Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Точка приложения ее может быть взята где угодно на ее направлении. Возьмем ее в O, в пересечении с линией AB, и найдем расстояния AO и OB.

Из подобных треугольников AGO и HGK имеем:

$$\frac{AO}{HK} = \frac{GO}{GK},$$

откуда

$$AO \times GK = HK \times GO \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Из треугольников GOB и GLM:

$$\frac{OB}{LM} = \frac{GO}{GL}$$

или

$$OB \times GL = LM \times GO;$$

но

$$LM = HK = S_1 = S_2,$$

а потому

$$OB \times GL = HK \times GO \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9a)$$

Вторые части у—ний (9 и 9a) равны, а потому равны и первые, т. е.

$$AO \times GK = OB \times GL$$

или

$$AO \times P = OB \times Q,$$

откуда

$$\frac{AO}{OB} = \frac{Q}{P}.$$

Обозначая AO через p и OB через q и присоединяя к последнему равенству найденное выше (8) для равнодействующей, получим:

$$R = P + Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{p}{q} \text{ или } Qq = Pp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Согласно с этим, правило сложения рассматриваемых сил может быть выражено словами так:

1. Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, равна сумме данных сил и направлена в ту же сторону.

2. Точка приложения равнодействующей находится между данными силами на расстояниях от них обратно пропорциональных данным силам.

Пример. Даны силы $P = 100$ кгр., $Q = 150$ кгр., действующие на расстояние 50 см. Найти равнодействующую их и точку приложения ее.

Из у ний (10 и 11) имеем:

$$R = P + Q = 100 + 150 = 250 \text{ кгр. и}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{Q}{P} = \frac{150}{100} \text{ и } p + q = 50.$$

Решая два последние уравнения, получаем:

$$100p = 150q, \; p = 1{,}5q;$$

$$1{,}5q + q = 50, \; q = 20 \text{ см.};$$

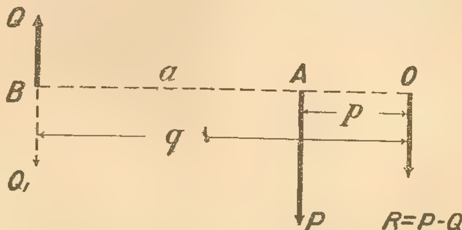
$$p = 1{,}5q = 1{,}5 \times 20 = 30 \text{ см.}$$

В два уравнения (10 и 11) входят 5 величин; следовательно, уравнения эти могут служить для нахождения двух величин, если три будут даны, но в виду характера уравнений выбор трех данных не может быть произвольным; так, напр., нельзя задать R, P и Q.

Если силы P и Q изменят свое направление относительно линии AB, оставаясь параллельными друг другу, то точка приложения равнодействующей не изменится.

30. Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны.

Даны (фиг. 27.) силы P и Q, действующие на расстоянии $AB = a$. Заметим, что точки приложения каждой из них могут быть взяты где угодно на продолжении каждой силы.



Фиг. 27. Параллельные силы, направленные в разные стороны.

Вычтя меньшую силу Q из большей P, разложим последнюю, пользуясь правилами предыдущего параграфа, на две силы:

$$Q_1 = Q \text{ и } R = (P - Q),$$

сумма которых должна быть равна

$$Q_1 + (P - Q) = P.$$

Если силу Q_1 приложим в точке B (на чертеже вниз), то сила $R = (P - Q)$ будет приложена в точке O, выбранной по условию (уравнение 11):

$$\frac{p}{a} = \frac{Q_1}{R} = \frac{Q}{P - Q}.$$

Силы Q и Q_1 взаимно уравновешиваются, а сила $R = P - Q$ будет равнодействующей данных сил P и Q. Беря отношение суммы членов каждого из отношений пропорции к предыдущему, получим:

$$\frac{p + a}{p} = \frac{Q + (P - Q)}{Q} = \frac{P}{Q} = \frac{q}{p},$$

где $q = p + a$ и p — расстояния равнодействующей R до данных сил.

Таким образом имеем:

$$R = P - Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$\frac{q}{p} = \frac{P}{Q} \text{ или } Pp = Qq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

что может быть выражено так:

1. Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в разные стороны, равна разности их и направлена в сторону большей из сил.

2. Точка приложения равнодействующей силы лежит на расстояниях от данных сил обратно пропорциональных этим силам.

Пример. Даны параллельные силы $P = 180$ кгр. и $Q = 80$ кгр., действующие в разные стороны на расстоянии 160 см. Найти величину и расстояние точки приложения равнодействующей их R от большей силы. Применяя у—ния (12 и 13), имеем:

$$R = P - Q = 180 - 80 = 100 \text{ кгр.},$$

$$\frac{q}{p} = \frac{100}{80}.$$

Сверх того (фиг. 27):

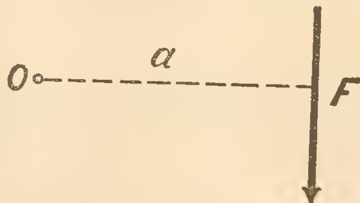
$$a = q - p = 160 \text{ см.}$$

Решая два последние уравнения, получаем:

$$q = \frac{180}{100}p = 1{,}8p,$$

$$1{,}8p - p = 160; \quad 0{,}8p = 160; \quad p = 200 \text{ см.}$$

31. Момент силы. Только что найденные правила для сложения параллельных сил получают более общее выражение, если ввести понятие о моменте силы. Моментом силы F (фиг. 28) относительно какой-либо точки O называется произведение силы на расстояние точки O до направления силы. Обозначая момент через M, получим:



Фиг. 28. Момент силы.

$$M = Fa \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Перпендикуляр a является плечом силы относительно данной точки, называемой центром моментов.

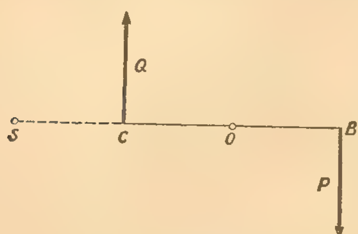
Если в фиг. 26 и 27 отрезок AB перпендикулярен к силам P и Q, то произведения: Pp и Qq суть моменты сил, а потому можем сказать, что моменты каждой из двух параллельных сил относительно точки приложения равнодействующей их равны. Момент же самой равнодействующей относительно той же точки равен нулю, так как сила проходит через центр моментов.

Обыкновенно величину силы измеряют в килограммах или фунтах, а плечо в метрах или футах, откуда момент силы будет измеряться в килограмм-метрах или в фунто-футах.

Если мы имеем свободное тело, находящееся в покое, то под действием данной силы, имеющей постоянное направление, тело будет двигаться по направлению силы; получится прямолинейное движение. Если тело имеет закрепленную точку или ось и сила приложена вне этой точки или оси, то получится другой род движения — вращение вокруг этой точки или оси. Так, усилие, передаваемое приводным ремнем шкиву, вращает этот шкив вокруг неподвижной оси. Результат действия силы в этом случае зависит не только от ее величины, но и от ее расстояния от оси вращения тела или от момента силы.

32. Пара сил. Если две параллельные силы, действующие в разные стороны, равны между собою (фиг. 29), то равнодействующая их $R = P - Q = O$. Такие силы не могут быть заменены одной силой; совокупность их получает название пары сил.

Расстояние между силами или длина перпендикуляра, опущенного из любой точки одной силы на направление другой называется плечом пары.



Фиг. 29. Пара сил.

Не трудно видеть, что пара сил производит или стремится произвести лишь вращательное движение. В самом деле, равнодействующая сил, составляющих пару, равна нулю; в таком случае поступательного движения не будет.

Пара не может быть уравновешена одной силой, а лишь парой с силами, стремящимися производить вращение в обратном направлении.

Моментом пары называют произведение одной из сил на плечо пары.

Пусть в фиг. 29 P и Q суть две равных и противоположных силы, образующие пару сил с плечом CB. Момент каждой из сил пары относительно точки O равен: $P \times OB$ и $Q \times OC$, а сумма их или момент пары: $M = P \times OB + Q \times OC = P \times OB + P \times OC = P(OB + OC) = P \times CB$.

Обозначая $CB = a$, получим $M = Pa$. . . . . (15)

Если имеем две равных параллельных силы, имеющих противоположное направление, или если система параллельных сил приводится к двум равным и противоположно направленным силам, то равновесие их возможно лишь в том случае, когда они направлены по одной прямой, т. е. когда расстояние между ними равно нулю; а в этом случае сумма моментов их равна нулю.

Момент данной пары сил есть величина постоянная, т. е. не зависит от положения центра моментов.

Возьмем некоторую точку S (фиг. 29). Момент пары относительно этой точки будет:

$$M = P \times SB - Q \times SC.$$

Берем перед Q знак минус, так как сила Q стремится вращать тело относительно точки обратно часовой стрелке. Преобразуя последнее равенство, получаем:

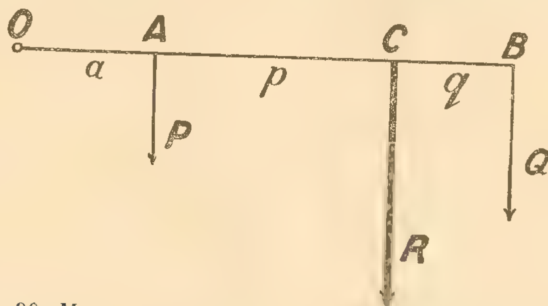
$$P(SB - SC) = P \times CB = Pa.$$

Действие пары сил на абсолютно твердое тело не изменится, если пару повернуть или перенести в другую плоскость, параллельную прежней плоскости ее действия, и притом так, чтобы в новом положении направление вращения осталось прежним. Момент ее также не изменится.

33. Сложение нескольких параллельных сил. Теорема моментов. Если дано несколько параллельных сил, то сложение их производим последовательно попарно; сложим сначала все силы одного направления, затем другого; получим две равнодействующих, равных сумме сил для каждого из направлений. Имея для сил того и другого направления такие равнодействующие, сложим их. Мы получим или общую равнодействующую данной системы сил или в частном случае получим пару сил.

Сложение параллельных сил упрощается применением теоремы моментов, по которой момент равнодействующей двух или нескольких сил равен алгебраической сумме моментов этих сил относительно той же точки. Сделаем вывод этой теоремы для двух параллельных сил одного направления.

Даны (фиг. 30) силы P и Q, их равнодействующая R и центр



Фиг. 30. Момент равнодействующей параллельных сил.

моментов O. Для параллельных сил имеем (§ 29): $R = P + Q$. Умножив обе части на $OC = a + p$, получим:

$$R \times OC = P \times OC + Q \times OC = \\ = P(a+p) + Q(a+p) = Pa + \\ + Pp + Qa + Qp.$$

Здесь $Pp = Qq$ (у—ние 11), а потому

$$Pa + Qq + Qa + Qp = Pa + Q(a + p + q),$$

т. е.

$$R \times OC = P \times OA + Q \times OB. \qquad (16)$$

что и требовалось доказать.

Подобный вывод может быть сделан для какой угодно системы сил, и мы можем сказать:

Момент равнодействующей произвольной системы сил относительно любой точ-

ки, лежащей в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов всех составляющих сил данной системы.

Условие это выражается следующим уравнением:

$$M(R) = M(F_1) + M(F_2) + M(F_3) + \ldots$$

или

$$M(R) = \Sigma M(F) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16а)$$

где R — равнодействующая сила, F_1, F_2, F_3, ... составляющие силы,

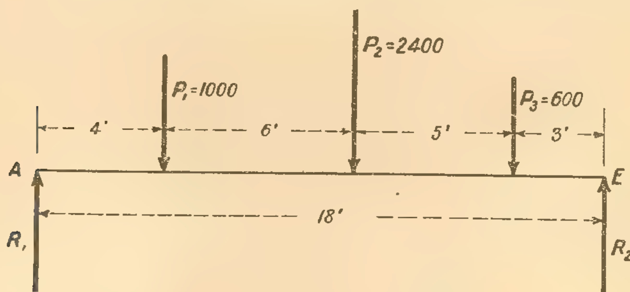
M — обозначение момента, ΣM — сумма моментов,

$M(R)$ — момент силы R, $\Sigma M(F)$ — сумма моментов всех сил: F_1, F_2, F_3, ...

Если мы знаем, что какая-либо система параллельных сил находится в равновесии, то равнодействующая такой системы сил равна нулю; равен нулю и момент такой равнодействующей. То же относится и к пересекающимся силам. Но так как, по только-что доказанному, момент равнодействующей равен алгебраической сумме моментов составляющих, то если данная система сил находится в равновесии, то алгебраическая сумма моментов всех таких сил равна нулю, т. е.

$$\Sigma M(F) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16б)$$

Пример применения теоремы моментов. Балка пролетом 18 фут несет сосредоточенные нагрузки в 1000 фн., 2400 фн. и 600 фн. на расстояниях соответственно:



Фиг. 31. К примеру в § 33.

4, 10 и 15 фут от левого конца балки. Балка поддерживается по концам пролета двумя колоннами. Найти нагрузку на каждую колонну, пренебрегая весом балки.

В фиг. 31 AE изображает балку пролетом 18 фут, а P_1, P_2 и P_3 нагрузки, размещенные так, как указано в задаче. Обозначим через R_1 и R_2 реакции опор. Все силы в совокупности с R_1 и R_2 находятся в равновесии, а потому сумма моментов их

относительно произвольной точки равна нулю. Беря сумму моментов относительно точки A, мы получим уравнение:

$$R_1 \times 0 + 4 \times 1000 + 10 \times 2400 + 15 \times 600 - 18 \times R_2 = 0,$$

или

$$18 \times R_2 = 4000 + 24000 + 9000 = 37000,$$

откуда

$$R_2 = 2055 \text{ фн.}$$

Таким же путем, беря моменты относительно точки E, получим уравнение:

$$R_2 \times 0 - 1800 - 8 \times 2400 - 14 \times 1000 + 18 \times R_1 = 0,$$

или

$$18 \times R_1 = 1800 + 19200 + 14000 = 35000,$$

откуда

$$R_1 = 1945 \text{ фн.}$$

Читателю предлагается обратить внимание на эти уравнения, чтобы уяснить себе употребления положительных и отрицательных знаков перед численными величинами моментов.

Указанные уравнения были взяты в предположении равновесия всех сил, а потому должно быть удовлетворено условие, что сумма всех сил равна нулю. Условие это может служить для проверки сделанных вычислений; беря силы, направленные вниз со знаком $+$, а вверх со знаком $-$, получим:

$$1000 + 2400 + 600 - 2055 - 1945 = 0,$$

или

$$-4000 + 4000 = 0.$$

Следовательно, реакции опор: 2055 в E и 1945 фн. в A удерживают балку в состоянии равновесия при данных нагрузках.

Решение задач, касающихся определения реакций опор на балку, может быть произведено и так: одну реакцию определяют, беря уравнение моментов, а другую вычитанием полученной реакции из алгебраической суммы вертикальных нагрузок. Поверка решения в этом случае может быть сделана применением уравнения моментов относительно другой опоры.

Многие задачи могут быть решены гораздо легче применением правила моментов, чем применением треугольника или многоугольника сил. Так, пусть в фиг. 21 длина перпендикуляра из точки B на линию AC равна 36 дм. и расстояние AB равно 60 дм. Берем моменты сил относительно точки B. Сила S проходит через точку B, плечо ее равно 0, а потому момент тоже равен 0. Моменты остальных сил соответственно равны: $+36T$ и $-60P$.

Из только что указанного условия равновесия (у-ние 16б) следует, что алгебраическая сумма этих моментов должна быть равной 0, т. е. $36T - 60P = 0$.

Отсюда

$$T = \frac{60P}{36} = 1{,}67P.$$

34. Вопросы и задачи.

1. Сколько величин входит в два уравнения, относящиеся к сложению двух параллельных сил? Сколько из этих величин должно быть дано для получения определенного решения?

2. Переместится ли точка O приложения равнодействующей R (фиг. 26), если силы P и Q повернутся на какой-либо угол, сохраняя свои точки приложения?

3. Дано (фиг. 27): $R = 10$ кгр., $P = 40$ кгр., $p = 24$ см. Найти другую силу и ее расстояние до равнодействующей.

4. Два человека несут груз, подвешенный на горизонтальном шесте. Один человек прилагает к одному концу усилие в 40 фн., а другой к противоположному концу — усилие в 60 фн. Длина шеста равна 10 футам. Найти вес груза и положение его, пренебрегая весом шеста.

5. Найти момент пары, силы которой равны по 40 кгр., плечо 50 см. и направление вращения обратно часовой стрелке.

6. Ворот вращается усилием, приложенным к его рукоятке. Вызывается ли этим усилием пара? Если вызывается, то где находится вторая сила?

7. Длина рукоятки точильного камня равна 30 см., усилие, прилагаемое человеком в направлении вращения рукояти, равно 15 кгр. Какова величина момента?

Примечание. Момент этот называется вращающим моментом или моментом вращения.

8. Ленточный тормаз охватывает маховик мотора. Каков будет вращающий момент мотора, если давление на конце рукояти тормаза равно 40 фн? Длина рукояти 24 дм.

ГЛАВА V.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

35. Основные положения о центре тяжести. К числу сил, действующих в постройках и машинах, относится собственный вес их. Вес этот очень часто достигает значительной величины и потому его необходимо учитывать вместе с другими силами. Причиной веса является сила тяжести, действующая на каждую из тех маленьких частиц, из которых состоят все тела природы. Было бы крайне сложно учитывать в отдельности веса всех таких частиц, входящих в состав данного сооружения или машины. В целях упрощения решения вопросов статики, в которых рассматривается влияние силы тяжести, вводят понятие о центре тяжести.

Веса всех частиц тела образуют систему параллельных сил, направленных всегда вертикально в одну и ту же сторону. Равнодействующая такой системы сил равна сумме составляющих сил, т. е. полному весу тела. Точка приложения этой равнодействующей или веса тела называется центром тяжести тела. Центр тяжести тела определяют как точку, через которую проходит направление силы тяжести, т. е. веса тела.

Из изложенного в главе IV о параллельных силах следует:

1. Центр тяжести есть постоянная точка в теле при всевозможных положениях его при условии неизменяемости формы тела (§ 29 и задача 2, § 34).

2. Если мы разделим тело на несколько частей, то момент веса всего тела равен алгебраической сумме моментов весов отдельных частей относительно любой точки в той же плоскости.

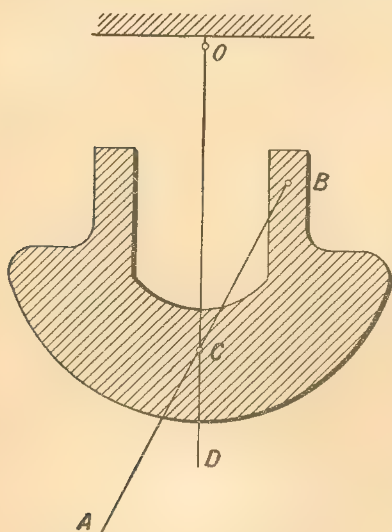
3. Если тело имеет центр симметрии и плотность тела везде одинакова, то центр тяжести его совпадает с центром симметрии тела. Так, центр тяжести однородного шара совпадает с его

геометрическим центром, центр тяжести круга тоже лежит в его геометрическом центре.

4. Если тело одинаковой плотности имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси. Примерами могут служить: а) равнобедренный треугольник (симметричный относительно высоты его); центр тяжести такого треугольника должен лежать на его высоте; б) цилиндр с круглым основанием, имеющий центр тяжести на своей оси.

36. Определение центра тяжести посредством опыта.

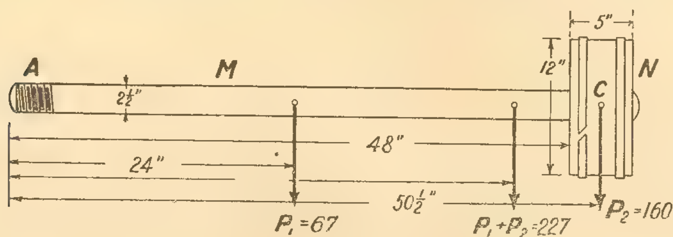
В однородных телах вопрос о положении центра тяжести решается изучением геометрической формы фигуры тела. Центр тяжести может быть найден опытным путем; опыт можно произвести непосредственно с самим телом или, если это не удобно, заменить это картонной моделью, сделанной в масштабе. Подвешивание такой модели за две различных точки даст две линии, проходящих через точку привеса и через центр тяжести и дающих своим пересечением искомое положение этого центра. По найденному центру тяжести модели находится центр тяжести тела.



Фиг. 32. Определение центра тяжести опытом.

Возьмем в виде примера противовес, который прикрепляется иногда к кривошипам паровых машин. Пусть этот противовес имеет сечение, указанное в фиг. 32, причем толщина противовеса одинакова по всему сечению его. При подвешивании противовеса последовательно за две точки найдем линии OD и BA, пересечение которых даст искомое положение центра тяжести C. В самом деле, если тело подвесить за точку O, то центр тяжести будет лежать на вертикальной линии OD; линия эта в данном случае является осью симметрии, а потому можно бы и не делать указанного подвешивания. Если противовес затем подвесим за точку B, получим линию BA, занимающую во время этого подвешивания вертикальное положение; она тоже пройдет через центр тяжести тела. Пересечение линий OD и AB и будет центром тяжести тела. Описанные приемы часто находят применение на практике, когда не нуждаются в большой точности или в случаях очень сложной формы тела.

37. Нахождение центра тяжести всего тела по центрам тяжести частей его. Если профиль тела может быть разделен на правильные геометрические фигуры, напр.: тре-



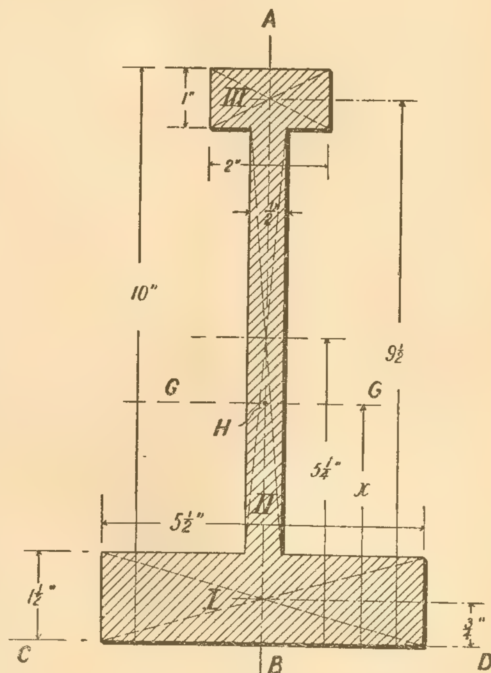
Фиг. 33. К примеру 1, § 37.

угольники, квадраты, прямоугольники и т. п., то центр тяжести найдется применением теоремы: момент равнодействующей произвольной системы параллельных сил равен сумме моментов составляющих сил, или в применении к весу тела: момент полного веса тела равен сумме моментов весов его отдельных частей относительно любой точки в той же плоскости.

Примеры.

1. Найти точку, к которой должен быть подвешен на веревке шток M с поршнем N (фиг. 33) так, чтобы шток сохранял горизонтальное положение.

Веревка должна охватывать шток в том месте, где лежит общий центр тяжести штока и поршня. Центр тяжести их найдется путем следующих рассуждений: вес штока может считаться



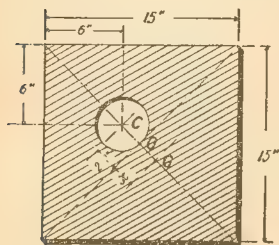
Фиг. 34. К примеру 2, § 37.

сосредоточенным в его центре тяжести, который лежит посредине его длины, как тела постоянного сечения. По той же причине центр тяжести поршня лежит в точке C. Искомый общий

центр тяжести лежит в некоторой точке, находящейся между A и C; обозначим расстояние его от левого конца A штока через x. Берем моменты весов относительно A. Тогда при размерах, указанных на чертеже и при весах штока и поршня соответственно 67 и 160 фн., получим: $24 \times 67 + 50^1/_2 \times 160 = 227x$ или $227x = 9688$ и $x = 42,7$ дм.

2. Фиг. 34 дает поперечное сечение клепаной балки. Найти центр тяжести этого сечения.

Сечение балки симметрично относительно вертикальной оси AB балки, следовательно, центр тяжести лежит где-нибудь на этой оси. Положим, что это будет точка H на расстоянии x дм. от линии CD. Разбиваем сечение на три прямоугольника: I, II, III. Центр тяжести каждого из них лежит на пересечении их диагоналей. Кроме того ясно, что веса́ как самого сечения, так и каждой из его частей пропорциональны площадям, так как балка отрезана по концам перпендикулярно ее длине, Центр тяжести части III находится на расстоянии $9^1/_2$ дм. от CD, центр тяжести части II — на $(1^1/_2 + 7^1/_2 \times {}^1/_2) = 1^1/_2 + 3^3/_4 = 5^1/_4$ дм. и, наконец, I — на $9^1/_2$ дм. от той же линии. Площади частей в кв. дм. равны: I — $5^1/_2 \times 1^1/_2 = 8^1/_4$, II — $7^1/_2 \times {}^1/_2 = 3^3/_4$ и III — $2 \times 1 = 2$.



Фиг. 35. К задаче 3, § 38.

Берем сумму моментов площадей I, II, III относительно линии CD и приравниваем ее моменту полной площади, т. е.:

$$8^1/_4 \times {}^3/_4 + 3^3/_4 \times 5^1/_4 + 2 \times 9^1/_2 = (8^1/_4 + 3^3/_4 + 2)\,x$$

или

$$14x = 44,87,$$

откуда

$$x = 3,2 \text{ дм.}$$

38. Вопросы и задачи.

1. Найти положение центра тяжести треугольника

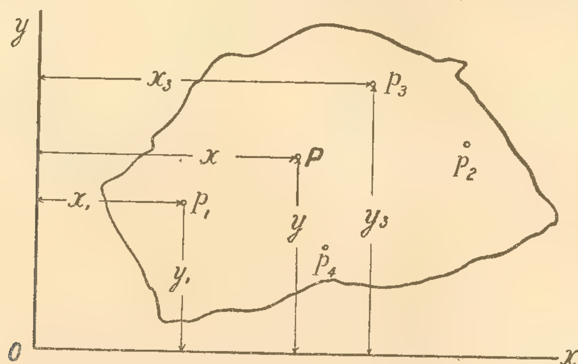
2. Всегда ли центр тяжести находится внутри объема, занимаемого телом? Пояснить ответ примером.

3. Найти центр тяжести квадратного 15×15 дм. листа одинаковой толщины, в котором продавлено круглое отверстие диаметром в 4 дм., расположенное так, как указано в фиг. 35.

4. Найти общий центр тяжести тела, состоящего из круглого прута диаметром 2 см. и длиною в 18 см., на конце которого укреплен шар диаметром 6 см. Пренебречь частичным совмещением объемов прута и шара.

39. Определение центра тяжести относительно двух взаимно перпендикулярных линий (осей). Для тела, не имеющего осей симметрии, применяют следующий метод для нахождения центра тяжести. Предположим тело разделенным на то или другое число частей, центры тяжести которых легко опре-

деляются, напр., по их форме; пусть веса частей равны: p_1, p_2, p_3 и т. д. Расстояние каждой части от двух взаимно перпендикулярных линий (прямоугольных осей) обозначим соответственно через x_1 и y_1; x_2 и y_2; x_3 и y_3 и т д. (фиг. 36). Общий вес всех



Фиг. 36. Центр тяжести относительно двух осей.

частей равен полному весу тела, т. е. $P = p_1 + p_2 + p_3 \dots = \Sigma p$, где знак Σ обозначает, что берется сумма всех частей тела. Этот вес или, что то же, равнодействующая весов частей приложен к центру тяжести тела. Пусть расстояние центра тяжести тела от оси Oy будет x, а от оси Ox — y. Расстояние y может быть найдено из теоремы моментов в применении к точке O или к оси Ox, так как расстояния весов при направлении их параллельно оси Ox от точки O и от оси Ox равны между собою. Имеем:

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + \dots = (p_1 + p_2 + p_3 + \dots) \times y$$

или при принятом сокращении:

$$\Sigma py = y \times \Sigma p = y \times P,$$

откуда

$$y = \frac{\Sigma py}{\Sigma p} = \frac{\Sigma py}{P} \dots\dots\dots\dots \quad (17)$$

Таким же путем, т. е., беря моменты относительно точки O или оси Oy, найдем:

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} = \frac{\Sigma px}{\Sigma p} = \frac{\Sigma px}{P} \dots\dots \quad (18)$$

40. Виды равновесия тел. Приложим горизонтальную силу P к конусу, показанному в фиг. 37, и слегка наклоним его, т. е. приподнимем точку C; если затем предоставим конус самому себе, то он возвратится в свое первоначальное положение. Это произойдет потому, что вес конуса Q, приложенный в центре тяжести его G, не будет уравновешен и вместе с реакцией опоры B образует пару, которая возвратит конус в прежнее положение.

Если мы увеличим наклон настолько, что Q пройдет через точку B, то при малейшем наклоне влево конус опрокинется. В этом случае реакция опоры в B, равная по величине весу Q, образует с весом Q пару, стремящуюся вывести конус из его первоначального положения.

Фиг. 37. Устойчивое равновесие тела.

В первом случае тело находится в устойчивом равновесии, так как выведенное слегка из своего начального положения, оно будет находиться под влиянием сил, стремящихся вернуть его в это положение. Во втором случае равновесие неустойчивое. Если силы, действующие на тело, уравновешиваются при всех положениях тела, то оно находится в безразличном равновесии. В таком положении находится, напр., шар, сделанный из матерьяла одинаковой плотности и лежащий на горизонтальной плоскости. В этом случае вес шара всегда проходит через его точку опоры.

Фиг. 38. К задаче 1, § 41

Если небольшое изменение положения тела повышает его центр тяжести, то тело находится в устойчивом равновесии, если понижает, тело находится в неустойчивом равновесии и, наконец, если при изменении положения тела, не происходит ни повышения, ни понижения центра тяжести, тело находится в безразличном равновесии. Тело устойчиво до тех пор, пока вертикальная линия, проведенная через центр тяжести его, проходит через площадь его опоры (фиг. 37). Это условие должно быть соблюдено во всех тех сооружениях, которые должны удерживаться на месте без особых мер укрепления.

41. Вопросы и задачи.

1. Одна из сторон угольника (фиг. 38) равна 6 дм., а другая 4 дм.; толщина его $^3/_4$ дм. Найти, пользуясь у-ниями (17 и 18), положение центра тяжести.

2. В каком равновесии находится горизонтальная балка, поднимаемая с помощью веревки, охватывающей ее под центром тяжести ее?

3. Дать два примера на безразличное равновесие тела.

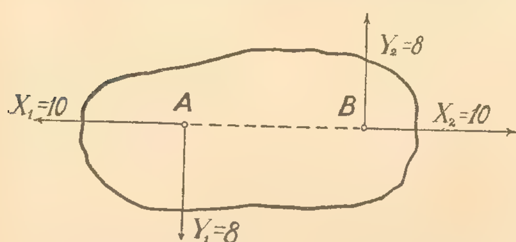
4. Где должен лежать центр тяжести повозки для более устойчивого равновесия ее: выше или ниже?

5. В каком равновесии находится цилиндрический котел, лежащий на фундаменте, относительно своей продольной оси и горизонтальной оси, перпендикулярной к первой?

ГЛАВА VI.

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ПЛОСКОСТИ. ОБЩИЕ И ЧАСТНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ИХ.

42. Об условиях равновесия сил, произвольно направленных. В главах IV и V были выведены те условия, которым должна удовлетворять определенная система пересекающихся или параллельных сил, лежащих в одной плоскости, для того чтобы они взаимно уравновешивались (§§ 21 и 33). Одно из этих условий сводится к тому, чтобы равнодействующая всех сил равнялась нулю. Если силы даны своими составляющими по двум взаимно перпендикулярным осям, то (§ 21) для этого должны быть в отдельности равны нулю алгебраические суммы составляющих всех сил по этим осям. Этого условия достаточно, если все силы проходят через одну общую точку. Но если силы пересекаются в разных точках или имеются силы параллельные, то одного указанного условия для равновесия мало. Действительно, если суммы вертикальных и горизонтальных составляющих и будут равны нулю, то этим не исключается возможность наличности пары сил, которая произведет вращение тела вокруг какой-либо оси. Наглядный пример этого представлен в фиг. 39. Для сумм сил по горизонтальному и вертикальному направлениям имеем:

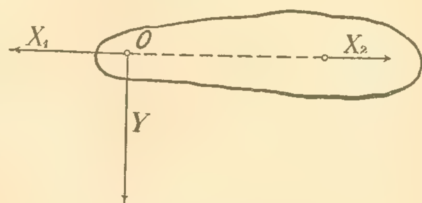


Фиг. 39. Силы не в равновесии, так как сумма моментов не равна нулю.

$$\Sigma X = -X_1 + X_2 = -10 + 10 = 0,$$
$$\Sigma Y = -Y_1 + Y_2 = -8 + 8 = 0,$$

а между тем силы не уравновешиваются, что ясно из чертежа. Видим, что X_1 и X_2 находятся в равновесии, а Y_1 и Y_2 образуют пару сил, которая одной силой не может быть уравновешена.

Для того, чтобы произвольная система сил как пересекающихся, так и параллельных, могла быть в равновесии, в дополнение к указанному условию необходимо другое, а именно: алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки в плоскости сил должна равняться нулю.



Фиг. 40. К § 42.

Но последнее условие, взятое в отдельности, также недостаточно для равновесия. Примером может служить любая пара сил или случай прохождения равнодействующей через точку, относительно которой берутся моменты. Так, напр., сумма моментов сил в фиг. 40 относительно точки O равна нулю, а силы между тем не уравновешиваются.

43. Условия равновесия произвольной системы сил.

Изложенное в предыдущем параграфе приводит нас к следующему выводу: если нам дана произвольная система сил, лежащих в плоскости, то для равновесия их необходимо и достаточно, чтобы в отдельности были равны нулю:

1. Алгебраическая сумма горизонтальных составляющих данных сил.
2. Алгебраическая сумма вертикальных составляющих данных сил.
3. Алгебраическая сумма моментов всех сил или сумма моментов их составляющих (§ 33) относительно любой точки в плоскости сил.

При принятых выше обозначениях эти условия равновесия выражаются соответственно следующими уравнениями равновесия:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \Sigma X = 0, \ldots\ldots \\ 2. & \Sigma Y = 0, \ldots\ldots \\ 3. & \Sigma M(F) = \Sigma M(X) + \Sigma M(Y) = 0 \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (19)$$

Здесь через F обозначены данные силы, а через X и Y — их составляющие по осям.

Важно не упускать из виду, что система взаимно уравновешивающихся сил не изменяет состояния тела, т. е., если тело находилось в покое, то при отсутствии других сил кроме данных уравновешивающихся сил оно будет продолжать пребывать в нем; если же оно двигалось с какой-либо скоростью, то при тех же условиях он будет продолжать свое равномерное прямолинейное движение.

44. Частные случаи равновесия сил. Рассмотрим в отдельности наиболее важные частные случаи равновесия сил, лежащих в одной плоскости.

1. На тело действуют две силы, пересекающиеся в одной точке. Для равновесия силы должны быть равны по величине и противоположны по направлению.

2. На тело действует несколько сил, пересекающихся в одной точке. Суммы составляющих данных сил по двум взаимно перпендикулярным осям должны быть равны нулю, т. е.

$$\Sigma X = 0 \text{ и } \Sigma Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

3. Тело подвержено действию параллельных сил: $P_1, P_2, P_3 \ldots$ Должны быть соблюдены два условия: алгебраическая сумма всех сил должна быть равна нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил также должна быть равна нулю. Это выражается соответственно уравнениями:

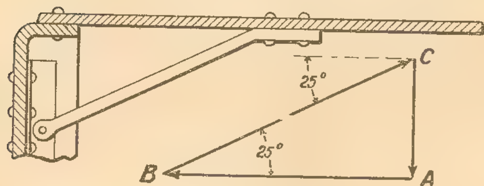
$$\Sigma P = 0 \text{ и } \Sigma M(P) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

У—ние $\Sigma Y = 0$ (19) отпадает, так как если одна ось Ox параллельна силам P, то составляющие сил по другой оси равны нулю.

4. Силы произвольно направленные. В этом случае имеем (см. предыдущий параграф):

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0 \text{ и } \Sigma M(X) + \Sigma M(Y) = 0 \ldots\ldots \quad (22)$$

Этими уравнениями, применяя их к соответственным частным случаям, можно пользоваться для нахождения тех или других неизвестных сил, входящих в систему сил взаимно уравновешивающихся; применение этого мы видели в приведенных выше задачах.



Фиг. 41. К задаче 1.

Если имеется система сил, не находящихся в равновесии, и требуется найти силы, которые уравновешивали бы эту систему сил, то к этому случаю также могут быть применены условия равновесия при включении в них искомых сил.

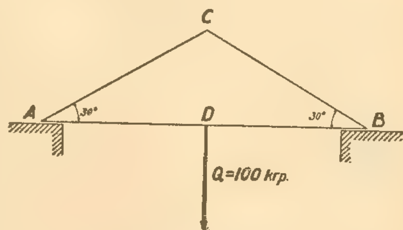
Все задачи статики могут быть решены вычислением (аналитически), т. е. применением указанных выше уравнений, или графически, т. е. построением чертежа в определенном масштабе.

Мы приводим ряд вопросов и упражнений, касающихся всех перечисленных случаев в целях повторения пройденного в предыдущих главах. Читатель должен научиться исследовать задачи и выбирать наилучший способ решения, наиболее пригод-

ный в действительных условиях практики. Общий план решения задач будет при этом состоять в следующем: тщательное ознакомление с данной задачей, подыскание наиболее подходящего решения, составление уравнений, ведущих к нахождению искомых величин, решение уравнений, поверка их и, если нужно, исследование решений.

45. Вопросы и задачи.

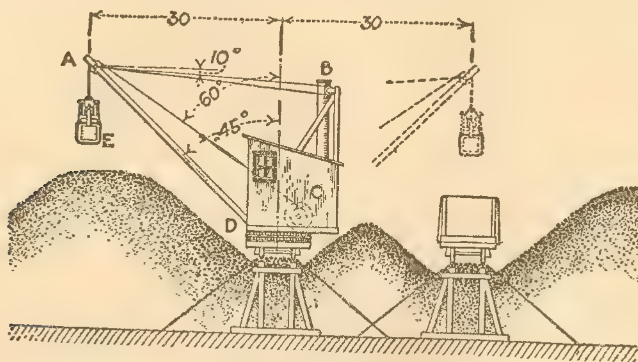
1. Днище цилиндрического котла усилено связями, устройство которых показано в фиг. 41. На одну такую связь приходится нагрузка от площади 15×22 кв. см. с давлением пара в 8 кгр. на кв. см. Найти усилие, растягивающее связь. Пар действует перпендикулярно к днищу.



Фиг. 41а. К задаче 2.

2. Дана симметричная стропильная ферма ABC (фиг. 41а), состоящая из двух ног AC и BC и затяжки AB. К середине затяжки AB в точке D, на талях подвешен груз $Q = 100$ кгр. Угол, образуемый каждой из ног с затяжкой, равен 30°. Найти усилие, растягивающее затяжку и сжимающее ноги фермы.

3. В кране, показанном в фиг. 42, общая нагрузка в точке A, со



Фиг. 43. К задаче 3.

стоящия из веса бадьи, угля и стрелы, равна 4.000 кгр. К веревке AC приложено подъемное усилие в 3.500 кгр. Найти усилие, сжимающее стрелу AD, и усилие в тяге AB.

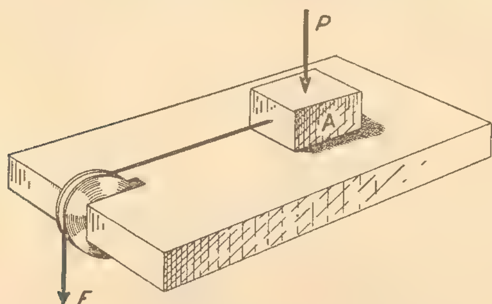
4. Поверить, выполняются ли общие уравнения равновесия силами в фиг. 39. Взять сумму моментов относительно точки B и затем относительно точки, лежащей вправо от B на 2 единицы. Расстояние $AB = a = 4$ ед.

5. Какими силами можно удержать в равновесии силы в фиг. 39?

ГЛАВА VII.

ТРЕНИЕ.

46. Понятие о трении. Если какое-либо тело движется, скользя по поверхности другого тела, то всегда существует известное сопротивление как во время движения, так и при начале его; сопротивление это должно быть превзойдено прежде, чем тело сдвинется с места. Сила, препятствующая движению одного тела по поверхности другого, называется с и л о й т р е н и я; в данном случае получается т р е н и е п р и с к о л ь ж е н и и; если мы катим одно тело по другому, то получаем другой вид трения — т р е н и е п р и п е р е к а т ы в а н и и т е л. Если не будет сделано оговорок, то будем иметь в виду трение при скольжении.



Фиг. 43. Определение силы трения.

С трением приходится считаться во всех типах машин и механизмов. Одна из задач инженера состоит в том, чтобы свести эти трения к минимуму употреблением соответствующих металлов и смазочных веществ.

Пусть тело A весом P (фиг. 43) находится на горизонтальной плите в состоянии покоя. Будем постепенно увеличивать груз, приложенный к концу веревки, прикрепленной к телу, до такой величины F, при которой очень малое увеличение груза заставит тело A двигаться, а очень малое уменьшение — останавливаться. Горизонтальная сила, передаваемая телу A веревкой, равна вертикальной силе F; следовательно, той же самой силе F по величине равна сила трения между поверхностью стола и тела A. Эта сила трения является тем сопротивлением движению, которое преодолевает горизонтальная сила, передаваемая телу веревкой. Отсюда следует:

С и л а т р е н и я в с е г д а н а п р а в л е н а п р о т и в о п о л о ж н о н а п р а в л е н и ю д в и ж е н и я т е л а.

Величину силы F в мгновение начала движения называют трением при покое. Опытами установлено, что сила, необходимая для преодоления трения во время равномерного движения тела, меньше той силы, которую нужно приложить для того, чтобы сдвинуть тело с места.

47. Законы трения. Законы трения были установлены Мореном и Кулоном, на основании ряда опытов. Законы эти таковы:

1. Трение зависит от матерьяла трущихся поверхностей.
2. Трение между однородными матерьялами больше, чем между разнородными.
3. Трение не зависит от величин трущихся поверхностей.
4. Трение увеличивается при увеличении нормального давления и наоборот, при условии, что не наступает разрушения поверхностей соприкосновения.
5. Трение при скольжении не зависит от скорости.

Позднейшие исследования показали, что эти законы не являются абсолютно точными, особенно по отношению к скорости, причем было найдено, что трение уменьшается при увеличении скорости и наоборот. Точно также было установлено, что сила трения при начале движения больше, чем сила трения при установившемся движении, т. е. трение при *покое* тел больше трения при движении.

48. Коэффициент трения и определение его посредством опытов. Отношение между силой трения, т. е. той наименьшей силой, которую необходимо приложить для того, чтобы начать движение тела, и нормальным давлением называется *коэффициентом трения при покое.* Примем следующие обозначения:

F — наименьшая сила, приводящая тело в движение,
N — нормальное давление между трущимися поверхностями,
f — коэффициент трения.

Тогда согласно с указанным определением:

$$f = \frac{F}{N} \qquad (23)$$

или

$$F = fN \qquad (24)$$

Силы F и N выражают в одних и тех же единицах, а потому *коэффициент трения* f — *число отвлеченное.*

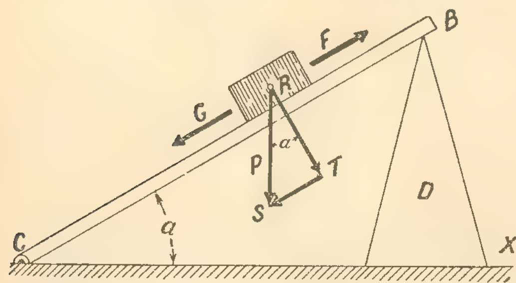
Так, напр., если сила в 50 фун. в состоянии сдвинуть тело весом в 200 фун., то коэффициент трения равен

$$f = \frac{F}{N} = \frac{50}{200} = 0{,}25.$$

Если в уравнении (23) сила F представляет собою силу, поддерживающую равномерное движение тела, то под f понима-

ют **коэффициент трения при скольжении.** Если не сделано оговорок, то имеют в виду этот случай трения в отличие от трения при покое.

В фиг. 44 показано устройство простого прибора для определения коэффициентов трения; прибор состоит из гладкой плиты, по которой может скользить тело R. Плита и тело сделаны из матерьялов, для которых определяют коэффициент трения. Угол наклона плиты к горизонтальной плоскости может изменяться с помощью какого-нибудь приспособления, напр., подставки D.



Фиг. 44. Определение коэффициента трения.

Поднимем правый край плиты настолько, чтобы легкий удар мог привести тело A в **равномерное движение** вниз по плите. Измерим угол BCX. Пусть отрезок RS представляет в некотором масштабе вес P тела. Разложим эту силу на две составляющих силы RT и TS, из которых первая перпендикулярна к плоскости CB, а вторая параллельна ей. Движение тела будет производиться силой TS, т. е. той составляющей силы тяжести, которая параллельна плоскости CB. Составляющая RT никакого движения не производит, но выражает величину нормального давления тела на плоскость CB. Это нормальное давление вызывает силу трения F, параллельную плоскости; эта сила стремится удерживат тело в состоянии покоя. По условию равновесия сил при равномерном движении тела сила $TS = G$, действующая вниз вдоль плоскости CB, должна численно равняться силе F, действующей вверх вдоль той же плоскости, т. е. $F = G$. Угол SRT равен углу BCX или углу a, так как линия RT перпендикулярна к линии CB и линия RS перпендикулярна к линии CX. Из треугольника SRT сила $TS = G = P\sin a$, $RT = P\cos a = N$. По указанному выше (у-ние 24)

$$F = fN = fP\cos a,$$

но $G = F$, следовательно,

$$P \times \sin a = fP\cos a,$$

откуда

$$f = \frac{P \times \sin a}{P \times \cos a} = \mathrm{tg}\, a \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла a, на который должна быть наклонена плоскость CB, чтобы при-

вести тело A в состояние равномерного движения вниз. Угол α называется углом трения.

В следующих таблицах приведены коэффициенты трения для некоторых матерьялов.

Коэффициенты трения при скольжении.

Матерьял	Трение в движении		
	состояние поверхности		
	сухая	слегка смоченная	мокрая
Чугун по чугуну или по бронзе	0,20	0,15	0,30
Железо о железо	0,44	0,14	—
Чугун по дереву	0,30	—	0,22
Дерево по дереву	0,40—0,50	—	—
Металл по камню	0,35—0,50	—	—
Камень по камню	0,50—0,70	—	—

Сопротивление при перекатывании отличается от трения при скольжении. При движении вагона, телеги и т. п. на осях их развивается трение скольжения о матерьял подшипника, а на ободе колес возникает сопротивление вследствие вдавливания колес в грунт при передвижении по обыкновенным дорогам или вследствие сминания рельс и бандажей колес на железных дорогах. Приводим некоторые коэффициенты сопротивления передвижению повозок и вагонов; в эти коэффициенты включено также трение на осях.

Железная дорога — 0,004; трамвайный путь — 0,006; асфальтовая дорога — 0,010—0,020; мостовая — 0,015—0,030; шоссе — 0,025—0,040; сухая проселочная дорога — 0,100; песчаный грунт — 0,200—0,400.

49. Вопросы и задачи.

1. Тело весом 200 кгр. находится на горизонтальной стальной плите. Если коэффициент трения 0,28, какая сила нужна для передвижения его?

2. Равна ли сила, необходимая для поднятия тела с некоторой поверхности, силе, требуемой для движения тела вдоль этой поверхности?

3. Из опыта (фиг. 44) угол α найден равным 15^0. Чему равен коэффициент трения между телом и плитой?

4. Железнодорожная платформа весом 30.000 кгр. требует силу в 100 кгр. для того, чтобы находиться в состоянии равномерного движения на горизонтальном пути. Каков коэффициент трения между колесами и рельсами? Трением в буксах пренебречь.

5. Какой угол надо придать плоскости AC (фиг. 44) для того, чтобы при коэффициенте трения между телом и плоскостью, равном 0,3, тело могло двигаться вниз с постоянной скоростью?

6. Вес телеги с нагрузкой равен одной тонне (1.000 кгр. или около 60 пуд.). Найти усилие для тяги ее: а) по хорошей проселочной дороге, б) по песку, в) усилие при заторможенных колесах.

ГЛАВА VIII.

ПРОСТЫЕ МАШИНЫ: РЫЧАГ, ВОРОТ И БЛОК.

50. Виды простых машин. Силы, действующие в машинах. Машиною называется всякое устройство, состоящее из одной или нескольких частей и назначающееся для передачи сил. Всякая сложная машина может быть разложена на ряд простых, к числу которых относятся: рычаг, ворот, блок, зубчатые колеса, наклонная плоскость, винт и клин. Эти машины, в свою очередь, приводятся к двум основным типам: рычагу и наклонной плоскости.

Всякая машина требует приложения к ней усилия для приведения ее в движение; движущее усилие преодолевает при посредстве машины полезное сопротивление; таким может быть поднимаемый машиной груз, передвигаемый ею предмет, и т. п. В частности к машине может быть приложено несколько полезных сопротивлений.

Называется это сопротивление полезным в отличие от тех вредных сопротивлений в виде разного рода трений (глава VII), которые сопровождают работу всякой машины.

В целях последовательности изложения мы в учении о машинах придержимся такого порядка: сначала будем рассматривать соотношение между движущим (рабочим) усилием и полезным сопротивлением, предполагая всякие другие силы в виде трений и весов частей машины отсутствующими, а затем посмотрим, как изменится величина рабочего усилия при наличности этих сил.

При рассмотрении сил, действующих в машинах, нужно обратить внимание на направление, величину и точку приложения каждой из них.

Помимо точек приложения рабочего усилия и полезного сопротивления каждая машина имеет одну или несколько точек опоры, в которых возникают реакции опоры (§ 19). Эти реакции также должны быть приняты во внимание.

51. Коэффициент полезного действия машин. Обозначим силы, действующие в машинах, следующим образом: полезное сопротивление — Q, рабочее усилие при отсутствии вред-

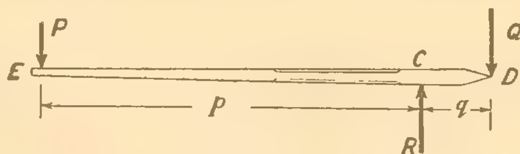
ных сопротивлений или, что то же, теоретическую величину его — P_0, а действительную при учете вредных сопротивлений — P.

Очевидно P всегда больше P_0; чем меньше разница между ними $(P - P_0)$, т. е. чем ближе P к P_0, тем меньше бесполезные затраты в машине, тем *полезнее* работает последняя.

В качестве мерила совершенства машины в механическом отношении мы можем принять отношение $P_0 : P$ или $\frac{P_0}{P}$. Отношению этому присваивают название *коэффициента полезного действия машины*. Коэффициент этот, представляющий отношение двух однородных величин, есть число отвлеченное; он всегда меньше единицы и тем ближе к ней, чем меньше вредные сопротивления по отношению к полезным. Его выражают часто в процентах. Обозначая его через k, будем иметь

$$k = \frac{P_0}{P} = \frac{P_0}{P} 100\% \qquad (26)$$

52. Рычаги. Виды рычагов. Рычаг (фиг. 45) представляет собою стержень, имеющий неподвижную точку опоры и служащий для подъема грузов или для преодоления других сопротивлений. Расстояния от точки опоры до точек приложения усилия и полезного сопротивления называются *плечами* рычага. Линия DE представляет собою ось рычага, точка C — его опора, сила P — движущее усилие и сила Q — вес или полезное сопротивление. Соотношение между усилием P и грузом Q найдем, применяя правило сложения параллельных сил (§ 29) или беря моменты относительно точки опоры C (§ 44, 3):



Фиг. 45. Рычаг первого рода.

$$Pp = Qq,$$

откуда

$$P = Q\frac{q}{p} \qquad (27)$$

Реакция R опоры рычага равна сумме сил P и Q, т. е.

$$R = P + Q \qquad (28)$$

Пример. В фиг. 45 плечо $q = 12$ см., плечо $p = 150$ см.; какой груз может уравновесить человек, развивая усилие 32 кгр.? Найти реакцию опоры.

Применяем у—ние (27), в котором:

$$P = 32 \text{ кгр.}, \ p = 150 \text{ см.}, \ q = 12 \text{ см.},$$

находим

$$Q = P\frac{p}{q} = 32\frac{150}{12} = 400 \text{ кгр.}$$

Реакция опоры

$$R = 400 + 32 = 432 \text{ кгр.}$$

Отношение длин плеч рычага $p:q$, которое в только что решенной задаче равно $150 : 12 = 12{,}5$, показывает, во сколько раз необходимое усилие может быть меньше нагрузки. Если это отношение больше единицы, то усилие будет меньше груза (или сопротивления) и наоборот. Отсюда следует, что из двух рычагов рычаг, имеющий большее отношение плеч, будет давать, как говорят, больший выигрыш в силе.

Фиг. 46. Рычаг второго рода.

Рычаги разделяют на два вида или рода, руководствуясь положениями действующей силы и сопротивления относительно опоры.

В рычагах первого рода усилие P и сопротивление Q находятся на противоположных сторонах опоры; сюда относится рассмотренный рычаг (фиг. 45).

В рычаге второго рода (фиг. 46) обе силы: P и Q находятся по одну сторону от опоры (правый конец рычага), причем точка приложения P лежит или дальше точки приложения груза Q от опоры (фиг. 46) или ближе к ней (фиг. 47).

В первом случае реакция опоры R численно равна разности $(Q - P)$, т. е.

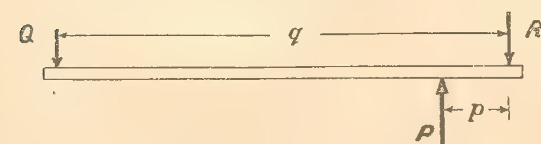
$$R = Q - P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

как это следует из правила сложения параллельных сил, направленных в разные стороны (§ 30). Реакция R равна равнодействующей сил Q и P, но обратно направлена.

Во втором случае (фиг. 47), когда груз Q находится дальше от опоры, чем усилие P, для реакции опоры имеем:

$$R = P - Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Примеры рычага первого рода: вага, ножницы, весло, клещи и т. п. Примеры рычага второго рода: ручная тачка, опирающаяся колесом на землю, которая служит ей опорой. Усилие человека приложено к ручкам,

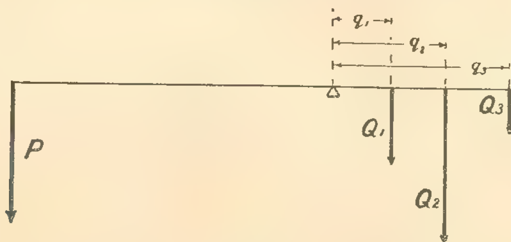


Фиг. 47. Рычаг второго рода.

а общий груз, равный сумме весов нагрузки и самой тачки, сосредоточен в их общем центре тяжести. Предохранительный клапан парового котла конструкции, показанной в фиг. 49, может служить также примером рычага второго рода; в нем

действующим усилием является давление пара P; давление это уравновешивается нагрузкой Q_1 на конце рычага.

53. Рычаг с несколькими нагрузками. В фиг. 48 представлен рычаг, на который действует несколько нагрузок:



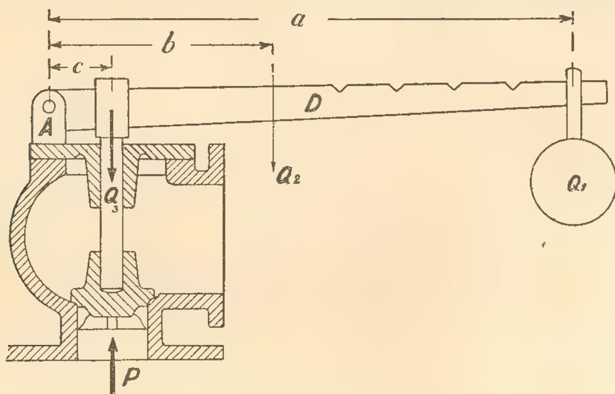
Фиг. 48. Рычаг с несколькими нагрузками.

Q_1, Q_2 и Q_3. Силу P находим применением теоремы моментов (§ 44), причем берем сумму моментов всех сил, приложенных к рычагу, относительно опоры. Получим:

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 - Pp = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

откуда находим искомую величину, напр. P, имея данными остальные величины, или величину p.

54. Вес рычага и вредные сопротивления в нем. Если вес рычага не велик, то им на практике пренебрегают; в про-



Фиг. 49. Предохранительный клапан.

тивном случае его нужно учесть, считая приложенным в центре тяжести рычага. То же относится к вредным сопротивлениям в виде трения на опоре, обыкновенно очень небольшим (редко больше 1—2%). Сделаем пример с учетом веса рычага предохранительного клапана парового котла (фиг. 49). Имеем данными: диаметр клапана 3 кв. дм., $a = 30$ дм., $c = 3$ дм, вес шара $Q_1 = 70$ фн.,

вес рычага $Q_2 = 12$ фн., $b = 10$ дм., вес штока с движущейся частью клапана $Q_3 = 6$ фн. Каково должно быть давление пара, чтобы поднять при этих условиях клапан с его седла?

Пусть p будет искомое давление, выраженное в фунтах на кв. дм. Площадь клапана равна

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14}{4} \times 3^2 = 0,785 \times 3^2 = 7,07 \text{ кв. дм.};$$

отсюда полное давление пара P, действующего на клапан, равно $7,07p$. Для равновесия алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки (берем точку A) должна быть равна нулю, т. е.

$$Q_3 c + Q_2 b + Q_1 a - Pc = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31a)$$

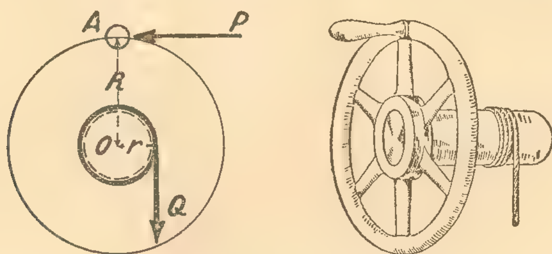
$$6 \times 3 + 12 \times 10 + 70 \times 30 = 7,07p \times 3,$$

или $21,21p = 2238$, откуда

$$p = 105,5 \text{ фн. на кв. дм.}$$

В этой задаче реакция оси A равна $P - (Q_1 + Q_2 + Q_3) = 746 - (6 + 18 + 70) = 652$ фн.

55. Ворот. Машина, называемая воротом (фиг. 50), состоит из барабана, на который навивается канат или цепь с прикре-



Фиг. 50. Ворот.

пленными к ней грузом, и из колеса или рукояти, являющихся местом приложения усилия рабочего. Таков ворот, применяемый при подъеме грузов в различного рода постройках, в шахтах и т. п. Пусть сила P приложена к рукояти или колесу A ворота, вал которого находится под действием нагрузки Q. Соотношение между P и Q найдем, беря моменты относительно центра O вала (§ 44), причем получим

$$PR = Qr,$$

откуда

$$P = Q\frac{r}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Пример. Какая сила P должна быть приложена для поднятия груза в 250 кгр. при радиусе барабана 16 см., если длина рукояти R равна 40 см.

Здесь $Q = 250$ кгр., $r = 16$ см., $R = 40$ см., а потому

$$P = \frac{250 \times 8}{40} = 50 \text{ кгр.}$$

Вредными сопротивлениями в вороте являются: трение на оси барабана и жесткость каната или трение в звеньях цепей. Сопротивления эти вызывают увеличение движущего усилия, что зависит от точности обработки частей ворота, их пригонки, содержания ворота в исправности и смазки трущихся частей. Обозначим движущее усилие, необходимое для поднятия груза Q в предположении, что вредных сопротивлений в вороте (или вообще в машине) нет, через P_0*); усилие же при наличности вредных сопротивлений через P. Отношение $P_0 : P$ всегда меньше единицы; он тем ближе к ней, чем вредные сопротивления меньше. Отношение это может служить мерой совершенства машины; его называют, как было указано выше, **коэффициентом полезного действия машины**. Обозначая его через k, получим

$$k = \frac{P_0}{P} \quad \text{(32a)}$$

Затрата на преодоление вредных сопротивлений в вороте составляет 8—10% от силы P_0, а потому коэффициент полезного действия ворота

$$k = 0{,}90 — 0{,}92 \text{ или } k = 90 — 92\%.$$

56. Вопросы и задачи.

1. Какой груз можно приподнять ломом при условии, что опора его находится в 3 дм. от центра тяжести груза и человек производит усилие в 75 фн. на расстоянии 48 дм. от опоры?

2. Расстояние от оси тачки до ее центра тяжести общего с нагрузкой равно 12 дм. Расстояние же от этого центра тяжести до рукоятей, к которым человек прилагает усилие в 60 фн., равно 40 дм. Какой вес на тачке может уравновесить человек?

3. В предыдущей задаче найти давление колеса на землю, когда усилием человека тачка приподнята и опирается только на колесо.

4. В фиг. 49: $c = 4\frac{1}{2}$ дм., $b = 15$ дм., $Q_2 = 25$ фн., $Q_3 = 10$ фн., диаметр клапана 4 дм. Если давление пара в котле равно 80 фн. на кв. дм., в какой точке должен быть помещен на рычаге шар, весящий 100 фн., чтобы удержать при этих условиях клапан от подъема?

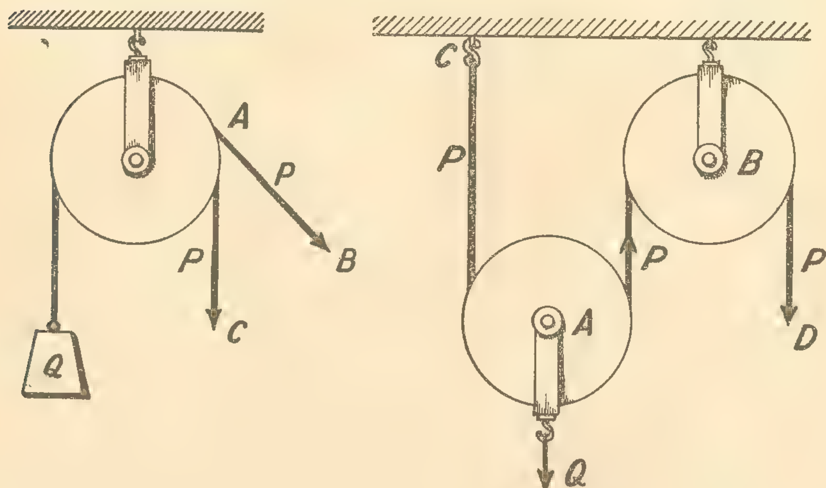
5. Какой вес (фиг. 50) может быть уравновешен силой $P = 40$ кгр., если $R = 45$ см. и $r = 8$ см.: а) при отсутствии вредных сопротивлений и б) при наличности их при коэффициенте полезного действия ворота, равном 0,95.

57. Блок. Блок (фиг. 51) представляет собою колесо с желобком по окружности. В желобке помещают веревку, канат, гибкий проволочный трос или цепь. Блок насажен на ось,

*) Это обозначение удерживается дальше.

помещенную в особой обойме, внутри которой он может свободно вращаться.

При больших размерах блокам присваивается название шкивов. В фиг. 51 представлен неподвижный блок или шкив, в фиг. 52 сочетание неподвижного блока B



Фиг. 51. Неподвижный блок. Фиг. 52. Подвижной и неподвижный блоки.

с подвижным A; последний при подъеме груза поднимается вместе с ним. Неподвижный блок не дает выгод в силе, а позволяет лишь изменять направление рабочего усилия, которое нужно приложить, чтобы уравновесить данную нагрузку. Так, в фиг. 50 усилие P_0 (при отсутствии вредных сопротивлений) и вес Q равны между собой, так как плечи их (радиус блока) относительно оси вращения блока одинаковы. Соотношения сохраняются при всех направлениях усилия P_0, будет ли это направление вертикальным (AC) или наклонным (AB).

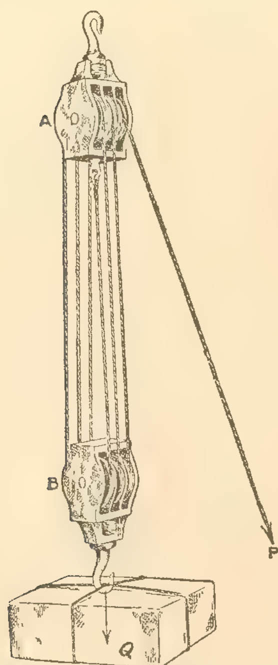
Подвижной блок (фиг. 52) дает возможность уменьшить усилие. Так как усилие передается по всей веревке, сохраняя свое значение P_0, то сумма сил, поддерживающих блок A, равна $2P_0$ (при отсутствии вредных сопротивлений). Она уравновешивает груз Q, а потому $2P_0 = Q$, откуда

$$P_0 = {}^1/_2 Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

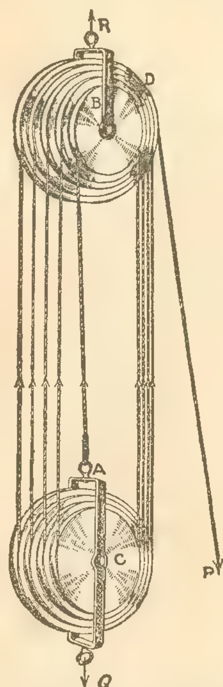
Сила $P = 50$ фн., приложенная в точке D, может уравновесить силу $Q = 100$ фн., приложенную к A.

58. Полиспасты или тали. Подвижной блок позволяет, как только что видели, уменьшить рабочее усилие вдвое (теоретически). Желая произвести дальнейшее уменьшение этого усилия или иметь возможность при данном усилии преодолеть

более значительные сопротивления, применяют сочетания нескольких блоков или шкивов, или системы из разного числа блоков, образуя, так наз. полиспасты или тали. Пример такого полиспаста изображен в фиг. 53, где подвижная



Фиг. 53. Полиспаст с верхней точкой прикрепления каната.



Фиг. 54. Полиспаст с прикреплением каната к подвижному блоку.

и неподвижная части состоят каждая из трех шкивов. Канат прикреплен к нижней стороне неподвижной обоймы под первым шкивом и охватывает поочередно сначала первый подвижной шкив, затем неподвижный и т. д. до тех пор, пока от последнего неподвижного шкива не направится к месту, где к нему будет приложено усилие P_0. Если число подвижных шкивов 3, то полное усилие, направленное вверх, равно $6P_0$, т. е. числу канатов, на которых висит подвижный блок. В данном случае каждую из подвижных и неподвижных частей называют, нередко, для сокращения речи, блоком. Вообще, если число канатов n, то

$$nP_0 = Q,$$

откуда

$$P_0 = \frac{1}{n} Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

т. е. рабочее усилие в полиспасте равно грузу, деленному на число канатов, на которых он подвешен.

Если канат прикреплен к подвижной части полиспаста, (фиг. 54), последняя имеет на один шкив меньше, чем неподвижная; выгода в силе будет меньше, чем в полиспасте, показанном в фиг. 53.

59. Коеффициент полезного действия блока и полиспаста. Приведенные выше соотношения (33 и 34) относятся к случаям, когда веса блоков и вредные сопротивления не учитывались. Если они принимаются во внимание, то движущее усилие при той же величине груза Q возрастает, коеффициент полезного действия неподвижного блока берут равным

$$k_1 = 0{,}94 - 0{,}96,$$

а подвижного

$$k_2 = 0{,}95 - 0{,}97.$$

Последний больше первого потому, что в нем давление на ось меньше в два раза; так, напр., в фиг. 52 имеем соответственно $2Q$ и Q. Но разница в потерях несколько уменьшается вследствие того, что в подвижном блоке приходится поднимать вместе с грузом и самый блок.

Таким образом для неподвижного блока

$$\frac{Q}{P_1} = k_1,$$

где P_1 — усилие при наличности вредных сопротивлений; отсюда находим

$$P_1 = \frac{Q}{k_1}.$$

Точно так же для подвижного блока

$$P_0 = \frac{Q}{2},\ k_2 = \frac{P_0}{P_2} = \frac{Q}{2P_2},$$

где P_2 — усилие в присутствии потерь в блоке. Отсюда

$$P_2 = \frac{Q}{2k_2}.$$

Если в полиспасте будет m неподвижных и n подвижных блоков, то

$$k = k_1{}^m \times k_2{}^n.$$

Каждый подвижной блок уменьшает силу, необходимую для подъема теоретически груза в 2 раза; если подвижных блоков в полиспасте два, то сила будет уменьшена в 2×2 или в 4 раза; при n блоках — в $2n$ раз (теоретически). В действительности усилие будет равно

$$P = \frac{Q}{2n} \times \frac{1}{k} = \frac{Q}{2n\, k_1{}^m k_2{}^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

60. Дифференциальный блок. Дифференциальный блок Вестона (фиг. 55) состоит из трех шкивов: одного подвижного и двух неподвижных. Последние отличаются друг от друга величиной диаметров и вращаются на общей оси. Все три шкива охватываются цепью так, как это показано на рисунке. Соотношение между усилием P_0 и грузом Q может быть определено следующим путем: при радиусе меньшего неподвижного шкива A — r и радиусе большего R при двух цепях, идущих к нижнему блоку, усилие для подъема груза равно $Q:2$ (§ 58) или $Q = 2P_0$. Для равновесия верхней системы шкивов необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно точки O (центра неподвижного блока) была равна нулю. Следовательно,

$$P_0 R + {}^1/_2 Qr - {}^1/_2 QR = O$$

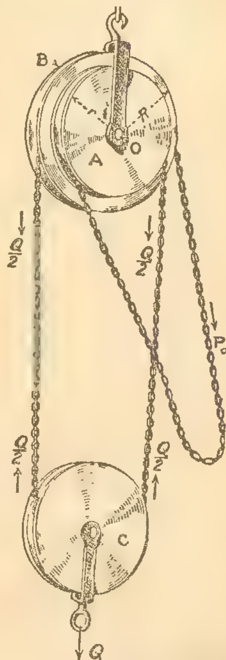
или

$$^1/_2 Q (R - r) = P_0 R,$$

откуда

$$Q = P_0 \times \frac{2R}{(R-r)} \quad \ldots\ldots \quad (35a)$$

Отношение $\frac{2R}{R-r}$ служит показателем той выгоды в силе, которую можно получить применением дифференциального блока. Очевидно, что чем R и r ближе друг к другу, тем груз будет больше прилагаемого усилия P_0. Блок Вестона имеет тот недостаток, что коэффициент полезного действия его невелик (около 0,3—0,4).



Фиг. 55. Дифференциальный блок.

61. Вопросы и задачи.

Примечание. Решить все приводимые здесь задачи сначала без учета, а затем с учетом вредных сопротивлений.

1. Какой вес Q (фиг. 52) может уравновесить человек, прилагающий усилие в точке D, равное 40 кгр.

2. Полиспаст (фиг. 53) имеет по четыре подвижных и неподвижных блока. Какой вес Q может быть уравновешен усилием в 100 кгр., приложенным на свободном конце каната?

3. Решить предыдущую задачу в применении к фиг. 54. Сколько блоков должно быть вверху при четырех подвижных блоках внизу?

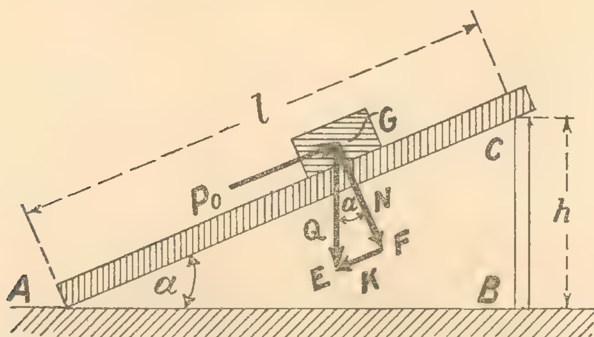
4. Найти раекцию опоры в задачах 2 и 3.

5. Имеем данными (фиг. 55): $R = 16$ см. и $r = 14$ см. Найти груз, который может быть уравновешен усилием в 100 кгр., приложенным к цепи

ГЛАВА IX.

НАКЛОННАЯ ПЛОСКОСТЬ.

62. Соотношение между силами при отсутствии трения. Действующая сила параллельна плоскости. Наклонными плоскостями часто пользуются на практике для нагрузки и выгрузки тяжелых грузов, напр., с автомобилей, железно-дорожных вагонов и т. п.; их часто применяют на строительных работах. Наконец, к виду наклонных плоскостей относятся участки дорог, имеющих подъем или спуск.



Фиг. 56. Наклонная плоскость (сила P_0 параллельна плоскости).

Согласно с намеченным выше порядком рассмотрения сил, действующих в машинах, мы сначала остановимся на случае наклонной плоскости абсолютно гладкой, т. е. лишенной трения, а затем примем во внимание силу трения.

Пусть AC (фиг. 56) представляет наклонную плоскость с углом наклона a^0, на которой лежит тело G весом Q. Найдем величину силы, направленной параллельно плоскости и необходимой для передвижения тела по ней. Разложим Q на две составляющих: K по направлению параллельному плоскости, и N — перпендикулярную к ней. Сила N уничтожается сопротивлением плоскости; так как по нашему предположению силы трения в этом случае нет, то груз G будет находиться под действием силы K, т. е. составляющей веса тела, параллельной

плоскости. Угол FGE = углу $CAB = a$. Треугольники EGF и ACB подобны, а потому

$$\frac{EF}{EG} = \frac{CB}{AC}.$$

Здесь $EF = K$, $EG = Q$, CB — высота наклонной плоскости h, AC — ее длина l; следовательно,

$$K = Q\frac{h}{l}.$$

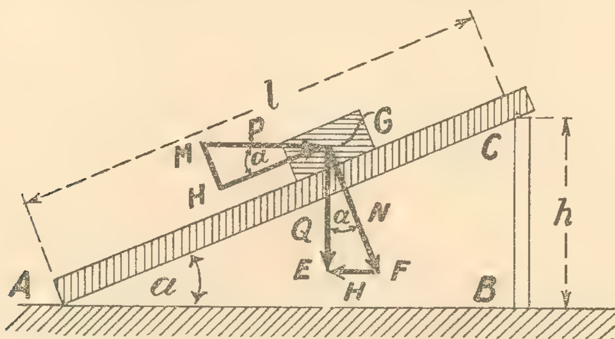
Искомая сила P_0 равна K или

$$P_0 = K = Q\frac{h}{l} \qquad (35б)$$

Так как $h : l = \sin a$, то

$$P_0 = Q\sin a \qquad (36)$$

Пример. Какая сила требуется для подъема груза 1.000 кгр. по плоскости, которая повышается 10 см. на метр ее длины?



Фиг. 57. Наклонная плоскость (сила P параллельна основанию плоскости).

Здесь имеем: $Q = 1.000$ кгр., $h = 10$ см., $l = 1$ м. = 100 см., а потому по у-нию (35):

$$P_0 = 1000 \times \frac{10}{100} = 100 \text{ кгр.}$$

Это показывает, что сила в 100 кгр., действуя параллельно плоскости, способна при равномерном движении или, что то же, при постоянной скорости, перемещать груз 1.000 кгр.

63. Сила параллельна основанию наклонной плоскости. В фиг. 57

$$\frac{EF}{GE} = \frac{CB}{AB}.$$

Здесь $EF = H$, $GE = Q$, $CB = h$, $AB = b$, а потому

$$H = Q\frac{h}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Следовательно, искомая сила (при отсутствии трения)

$$P_0 = Q\frac{h}{b} = Q\,\mathrm{tg}\,\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Примеры. 1. Какая сила, параллельная основанию плоскости, необходима для удержания груза на последней при данных примера в предыдущем параграфе.

Если $h = 10$, а $l = 100$, то

$$b = \sqrt{100^2 - 10^2} = \sqrt{9900} = 10\sqrt{99} = 99{,}5$$

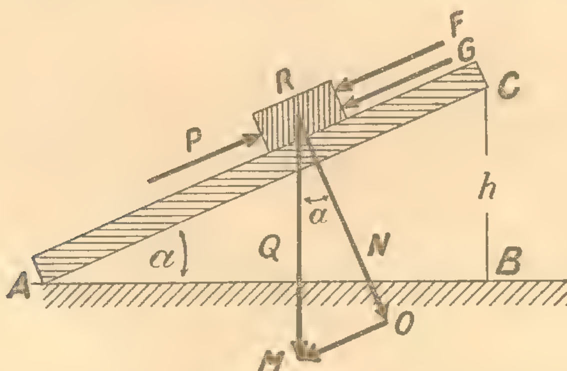
$$P_0 = 1000 \times \frac{10}{99{,}5} = 100{,}5 \text{ кгр.}$$

Как то следует из сопоставления чертежей (фиг. 56 и 57) и формул настоящего и предыдущего параграфов, сила H, параллельная основанию наклонной плоскости при прочих равных условиях превышает силу K, параллельную длине ее.

2. Какая сила требуется для удержания груза в 1.000 кгр. на плоскости с углом $5^0\,30'$?

По у-нию (37) находим:

$$P_0 = Q\,\mathrm{tg}\,\alpha = 1000 \times \mathrm{tg}\,5^0\,30' = 1000 \times 0{,}0963 = 96{,}3 \text{ кгр.}$$



Фиг. 58. Наклонная плоскость с трением (движение вверх)

64. Наклонная плоскость с трением. Усилие параллельно плоскости. Если тело движется по наклонной плоскости вверх, то составляющая силы тяжести, направленная параллельно плоскости, и сила трения направлены навстречу движению. Если же тело движется вниз, то в этом случае составляющая силы тяжести помогает движению, а сила трения

направлена вверх по плоскости, так как сила эта всегда направлена в сторону, противоположную движению и препятствует ему.

Пользуясь этими соображениями, найдем условия равновесия сил, приложенных к телу, находящемуся на наклонной плоскости.

Пусть в фиг. 58 сила P действует параллельно к плоскости и поддерживает равномерное движение вверх. Тогда сила трения F действует вниз и равна произведению коэффициента трения f на нормальное давление N (см. главу VII).

Составляющая же силы тяжести, действующая вниз по плоскости, равна

$$G = OM = Q\sin\alpha.$$

Для равновесия необходимо:

$$P = F + G,$$

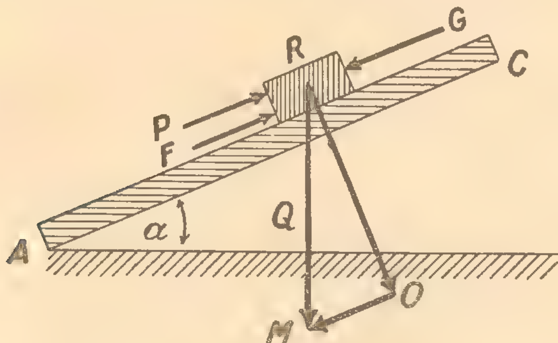
но

$$F = fN = fQ\cos\alpha,$$

следовательно,

$$P = fQ\cos\alpha + Q\sin\alpha = Q(\sin\alpha + f\cos\alpha) \ldots\ldots\ldots\ (39)$$

Пусть (фиг. 59) сила P попрежнему действует вверх, но



Фиг. 59. См. фиг. 58 (движение вверх).

в этом случае тело движется по плоскости вниз. В этом случае составляющая веса тела G, действующая вниз параллельно плоскости, уравновешивается силой P и силой трения F, действующими вверх, т. е.

$$G = P + F \text{ или } P = G - F.$$

Но

$$F = fQ\cos\alpha \text{ и } G = Q\sin\alpha,$$

следовательно,

$$P = Q\sin\alpha - fQ\cos\alpha = Q(\sin\alpha - f\cos\alpha) \ldots\ldots\ (40)$$

Таким образом, для того чтобы тело могло находиться на наклонной плоскости в одном из состояний равновесия, зна-

чение приложенной к нему силы P должно быть между пределами:

$$Q(\sin a + f\cos a) \text{ и } Q(\sin a - f\cos a).$$

65. Упрощенная формула для практических применений. Только что выведенные соотношения находят применение на практике, напр., при перемещении грузов по наклонным плоскостям, повозок по дорогам, когда рабочая сила или сила тяги параллельна самой плоскости. Если угол наклона плоскости очень мал, то приведенные уравнения (39 и 40) упрощают, причем вместо синуса угла вводят тангенс. Если мы обратимся к таблицам этих величин, то найдем такие значения их:

Углы в градусах	sin	tg	cos
0	0	0	1
2	0,0349	0,0349	0,9994
4	0,0698	0,0699	0,9976
6	0,1045	0,1051	0,9945
8	0,1392	0,1405	0,9903
10	0,1736	0,1763	0,9848
15	0,2588	0,2679	0,9659

При 10^0 абсолютная разница $\text{tg}10^0 - \sin 10^0 = 0,1763 - 0,1736 = 0,0027$, что в $^0/_0$ по отношению к меньшей величине дает относительную разницу всего $\frac{0,0027}{0,1736} \times 100^0/_0$ или немного более $1,5^0/_0$ $(1,6^0/_0)$. Ясно, что в целом ряде случаев практики этой разницей можно пренебречь. В то же время косинус очень мало отличается от единицы (см. таблицу) и может быть взят равным единице. При этих допущениях мы получим силу P с небольшим запасом; так, напр., при $a = 10^0$ запас этот для движения вверх будет около $4^0/_0$. Вводя такую замену, получим: для движения вверх и вниз:

вверх.............. $P = Q\,(\text{tg}a + f)$ .... (41)

вниз .... $P = Q\,(\text{tg}a - f)$................ (41a)

Тангенс есть отношение: $\sin a : \cos a$ или (фиг. 58)

$$\text{tg}a = \frac{BC}{AC} : \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB} = \frac{h}{b}.$$

Величину h выражают часто в частях заложения b плоскости, и тогда это отношение даст тангенс, который может быть прямо введен в одну из формул.

Пример 1. Найти силу для движения автомобиля весом 60 пуд. на подъем $7^0/_0$ по дороге с коэффициентом сопротивления $f = 0,05$.

Подъем 7⁰/₀ отвечает отношению высоты b к заложению h или тангенсу угла подъема, т. е. $\mathrm{tg}\,a = 7 : 100 = 0{,}07$, а потому:

$$P = 60\,(0{,}07 + 0{,}05) = 60 \times 0{,}12 = 7{,}2 \text{ пуд.}$$

П р и м е р 2. Какой угол отвечает подъему в 100⁰/₀? Для этого подъема

$$\frac{h}{b} = \frac{100\,\%}{100} = 1 = \mathrm{tg}\,a.$$

По таблицам для тангенсов найдем угол $a = 45^0$.

66. Вопросы и задачи.

1. Найти силу, параллельную плоскости и необходимую для удержания груза весом 1.600 кгр на плоскости AC с подъемом 1 см. на 12 см. Пренебречь силой трения.

2. При данных предыдущей задачи найти горизонтальную силу P_0, которая требуется для удержания того же предмета на плоскости.

3. Если коэффициент трения между предметом и матерьялом плоскости (задача 1) равен 0,18, найти силу P, которая может удержать предмет от скольжения вниз.

4. Найти силу P, параллельную плоскости, которая необходима для передвижения груза 1 600 кгр. вверх по плоскости AC (фиг. 56) при данных предыдущих задач.

Фиг. 60. Сила параллельна основанию плоскости при наличии трения.

67. Наклонная плоскость при усилии, параллельном ее основанию. Разберем случай, когда сила P (фиг. 60) действует параллельно основанию наклонной плоскости и тело находится в равномерном движении вверх. При этом составляющие силы тяжести и силы трения препятствуют движению и направлены противоположно усилию P вдоль плоскости.

Разлагаем вес $Q = EG$ на составляющие FE и GF. Первая, равная $Q\sin a$, должна непосредственно уравновешиваться со-

ставляющей силы P, параллельной плоскости и равной (из треугольника RMG) $RG = P\cos a$. Эта сила кроме силы $Q\sin a$ должна еще уравновешивать силу трения, производимую двумя силами: давлением $N = Q\cos a$ и своей составляющей $MR = SG$, перпендикулярной к плоскости и равной $P\sin a$. Сила трения будет равна $f(N + P\sin a) = f(Q\cos a + P\sin a)$.

Таким образом получаем:

$$P\cos a = Q\sin a + f(Q\cos a + P\sin a).$$

Делим это уравнение на $\cos a$:

$$P = Q\frac{\sin a}{\cos a} + fQ + fP\frac{\sin a}{\cos a},$$

$$P = Q\operatorname{tg} a + fQ + fP\operatorname{tg} a,$$

$$P - fP\operatorname{tg} a = P(1 - f\operatorname{tg} a) = Q(\operatorname{tg} a + f),$$

откуда

$$P = Q\frac{\operatorname{tg} a + f}{1 - f\operatorname{tg} a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Для случая движения тела по наклонной плоскости вниз сила трения или коэффициент f в у-нии (42) переменит свой знак на обратный (§ 64), и мы получим:

$$P_1 = Q\frac{\operatorname{tg} a - f}{1 + f\operatorname{tg} a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

68. Коэффициент полезного действия наклонной плоскости. 1. С и л а п а р а л л е л ь н а п л о с к о с т и. В этом случае при отсутствии трения имеем:

$$P_0 = Q\sin a,$$

а при наличии его:

$$P = Q(\sin a + f\cos a).$$

Коэффициент полезного действия k согласно с его определением (§ 51) выражается отношением этих величин, т. е.

$$k = \frac{\sin a}{\sin a + f\cos a}.$$

Деля числителя и знаменателя этой дроби на $\cos a$, получим:

$$k = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a + f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

2. С и л а п а р а л л е л ь н а о с н о в а н и ю п л о с к о с т и. Т е л о д в и ж е т с я в в е р х. Выше имели у-ния (38) и (42), из которых:

$$P_0 = Q\operatorname{tg} a \text{ и } P = Q\frac{\operatorname{tg} a + f}{1 - f\operatorname{tg} a}.$$

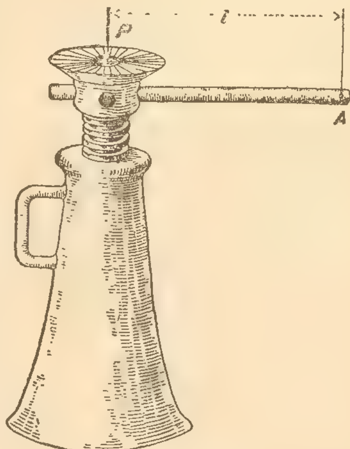
Отсюда

$$k = \frac{P_0}{P} = \operatorname{tg} a : \frac{\operatorname{tg} a + f}{1 - f\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} a(1 - f\operatorname{tg} a)}{\operatorname{tg} a + f}$$

Деля числителя и знаменателя на $\operatorname{tg}a$ и заменяя $\frac{1}{\operatorname{tg}a}$ равной ему величиной, называемой $\operatorname{ctg}a$ (котангенс a), найдем:

$$h = \frac{1 - f\operatorname{tg}a}{1 + f\operatorname{ctg}a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Последним уравнением (45) пользуются при определении коэффициента полезного действия винта, домкрата, винтового пресса. Выражение это применимо потому, что боковая поверхность витков винта представляет собой наклонную плоскость, обернутую вокруг стержня винта. Гайка, вращающаяся на резьбе болта, представляет собой пример движения по наклонной плоскости. Высота плоскости равна в этом случае ходу винта, основание — длине окружности стержня, на котором нарезана резьба; развернутая длина последней представляет длину наклонной плоскости. Угол резьбы есть угол наклона плоскости.



Фиг. 61. Домкрат.

Пример. Угол наклона резьбы винта равне 6°. Коэффициент трения между матерьялами гайки и болта равен 0,15. Найти коэффициент полезного действия винта.

В этом случае (по таблицам):

$$\operatorname{tg}a = \operatorname{tg}6^0 = 0{,}105,$$
$$\operatorname{ctg}a = \operatorname{ctg}6^0 = 9{,}514.$$

Подставляя эти значения в уравнение (45), мы получим искомое значение:

$$k = \frac{1 - f\operatorname{tg}a}{1 + f\operatorname{ctg}a} = \frac{1 - (0{,}15 \times 0{,}105)}{1 + (0{,}15 \times 9{,}514)} = \frac{0{,}984}{2{,}427} = 40{,}5\%.$$

69. Вопросы и задачи.

1. Домкрат, изображенный в фиг. 61, имеет четыре нитки на дюйме или, что то же, ход резьбы его равен $^1/_4$ дюйма; диаметр винта равен 2 дюймам. Приняв коэффициент трения матерьялов равным 0,14, найти коэффициент полезного действия домкрата.

2. Для поднятия груза (фиг. 61) приходится прилагать горизонтальное усилие в 40 фн. на расстоянии 24 дм. от центра винта. Найти вес груза.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Динамика.

ГЛАВА X.

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ.

70. Виды движений. Движения тел, совершающиеся в окружающем нас пространстве и выражающиеся переменой мест, занимаемых телами, могут быть весьма разнообразными. По форме пути, описываемого какой-либо определенной точкой тела*), движения бывают прямолинейными и криволинейными. По характеру самого движения или по быстроте прохождения данной точкой описываемого ею пути, движение может быть равномерным и неравномерным, причем каждое из них может совершаться по прямой или по кривой линии.

Рассмотрим первоначально равномерное движение, причем если не будет сделано оговорок, будем предполагать, что точка перемещается по прямой линии.

71. Равномерное движение. Под именем равномерного движения разумеют такое, в котором расстояния, проходимые телом, пропорциональны соответственным промежуткам времени. Обозначая через s расстояние, пройденное телом в t единиц времени, получим, что отношение $\frac{s}{t}$ или частное

---

*) Говоря о движении тела имеют в виду одну определенную точку его, большею частью центр тяжести тела.

от деления s на t в разбираемом случае — величина постоянная.

Отношение это показывает, с какой быстротой или скоростью совершается перемещение тела, а потому его называют скоростью данного движения и обозначают обыкновенно через v; следовательно:

$$\frac{s}{t} = v \text{ и } s = vt. \qquad (46)$$

Если s измеряется метрами, а t секундами, то v выражается определенным числом метров в секунду,

$$\frac{s \text{ метр.}}{t \text{ сек.}} = v \frac{\text{м.}}{\text{сек.}} \text{ или } v \text{ м. в сек. или } v \text{ м./сек.}$$

Если v выражено в километрах, а t в часах, то v получается в километрах в час, или, в сокращенном обозначении, км. в час. При этом:

$$1 \text{ м. в сек.} = \frac{1}{1000} \text{ км, в сек.} = \frac{3600}{1000} \text{ км. в час} = 3{,}6 \text{ км. в час} \qquad (47)$$

Примеры. 1. Поезд прошел 108 км. в 3 часа. Какова его скорость в км. в час и в м. в сек.?

$$v = \frac{108 \text{ км.}}{3 \text{ час.}} = 36 \text{ км./час} = 36 \times 1000 \text{ м./час} = \frac{36 \times 1000}{3600} \text{ м./сек.} =$$
$$= 10 \text{ м./сек.}$$

2. Подъемная машина, обслуживающая дом высотой 21 м., движется со скоростью $1^1/_2$ м. в секунду. Найти время подъема.

Из $s = vt$ имеем $t = s : v$, а потому

$$t = 21 \text{ м.} : 1{,}5 \text{ м. в сек.} = 14 \text{ сек.}$$

72. Начало инерции. Равномерное движение по прямому направлению совершается или в том случае, когда тело совсем не подвержено действию сил, или когда все силы, к нему приложенные, уравновешиваются. Тело, предоставленное самому себе, по первому началу или закону механики, называемому началом инерции, высказанному Ньютоном, сохраняет свое состояние, т. е. оно или находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, т. е. с постоянной скоростью, направленной по пути движения тела. Всякое другое движение вызывается присутствием одной или нескольких неуравновешивающихся сил. Но как только силы прекратят свое действие, тело будет двигаться равномерно по тому направлению, которое оно имело в мгновение прекращения действия сил на тело, сохраняя не только величину, но и направление скорости.

73. Равнопеременное движение. Приложим к телу, находящемуся в покое, силу, постоянную по величине и

направлению. Тело будет двигаться прямолинейно, причем скорость его будет возрастать пропорционально времени*). Мы получим случай равноускоренного движения. Быстроту, с которой растет скорость, называют ускорением. Если в t сек. скорость возрасла до v м. в сек., то ускорение $w = v$ м. в сек. : t сек. $= v \frac{\text{м.}}{\text{сек.}} : t$ сек. $= \frac{v}{t} \frac{\text{м.}}{\text{сек.}}$: : сек. $= \frac{v}{t} \frac{\text{м.}}{\text{сек.} \times \text{сек.}} = \frac{v}{t}$ м. в сек. в сек. $= \frac{v}{t}$ м. в сек.^{2}

Обозначение «м. в сек. в сек.» или «м./сек.^{2}» показывает, что для нахождения ускорения приходится делить метры на секунды два раза и что ускорение измеряется величинами, отличающимися от величин для измерения расстояний и скоростей и неоднородными с ними.

Так как $w = v : t$, то

$$v = wt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Найдем расстояние, которое тело пройдет в t сек. в рассматриваемом движении. Если скорость за t сек. возрастет при этом с нуля до v, то в виду возрастания ее с одинаковой быстротой (w постоянно), средняя скорость за данный промежуток времени t будет равна: $\frac{O + v}{2} = \frac{v}{2} = \frac{wt}{2}$ (у-ние 48). Расстояние s, которое тело пройдет при этой средней скорости, выразится произведением (у-ние 46):

$$\frac{v}{2} \times t = \frac{wt}{2} \times t = \frac{wt^2}{2} = s.$$

Мы видим, что t входит в это уравнение во второй степени и потому расстояния, как это и можно ожидать, растут быстрее времени, а именно, пропорционально квадрату времени.

Мы имеем таким образом для равнопеременного движения два уравнения:

$$s = \frac{wt^2}{2} \text{ и } v = wt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

которые могут служить для решения различных вопросов, относящихся к данному движению. В случае движения прямолинейного направление скорости совпадает с направлением движения; при движении криволинейном направление скорости в данной точке берется по касательной к пути движения тела. Касательная дает то направление, по которому тело стало бы двигаться по инерции, т. е. по прекращении действия на него всех сил.

---

*) Это может быть подтверждено опытным путем.

74. Падение тел. Примером равноускоренного движения может служить падение тел: движение это совершается под действием постоянной силы для каждого тела, равной весу тела.

Условимся в нашем изложении пренебрегать сопротивлением воздуха, так как точный учет влияния сопротивления воздуха на движение тела требует более сложных расчетов, что выходит за пределы этого курса. Это условие равносильно допущению, что ускорение силы тяжести постоянно. Опыты над падением тел, свободно опущенных из какой-либо точки, показывают, что тело движется прямолинейно, причем уравнение, выражающее зависимость проходимых телом расстояний таково: $h = \frac{gt^2}{2}$ м., где g ускорение силы тяжести, различное для разных точек земного шара; в среднем оно принимается равным 9,81 м. в сек.², а для упрощения подсчетов — 9,8 м. в сек.². Расстояние в этом случае обыкновенно обозначают через h.

Для скорости получим (у-ние 49): $v = gt$ и потому будем иметь для рассматриваемого движения два уравнения:

$$h = \frac{gt^2}{2} \text{ и } v = gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Если, положим, $g = 9{,}8$ м./сек., то

$$h = 4{,}9\,t^2 \text{ и } v = 9{,}8\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50a)$$

Примеры. Гаечный ключ падает в шахту, глубина которой равна 200 м. Какова будет его скорость, когда он достигнет дна шахты?

Имея уравнения (50), определим v в зависимости от h. Для этого исключим из этих уравнений t. Из второго имеем: $t = \frac{v}{g}$, а потому:

$$h = \frac{g}{2} \times \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$v^2 = 2gh \text{ и } v = \sqrt{2gh}.$$

Подставляя в него: $h = 200$ м. и $g = 9{,}8$ м./сек.², получим:

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 200} = \sqrt{3920} = 62{,}6 \text{ м. в сек.}$$

2. Камень, опущенный с верха башни, достиг ее основания через 4 сек. Найти высоту башни.

Камень падает с ускорением 9,8 м./сек.³, поэтому скорость в конце 4-й секунды (у-ние 50а)

$$v = 4 \times 9{,}8 = 39{,}2 \text{ м./сек.}$$

Высота башни, представляющая расстояние, пройденное камнем за 4 сек. (у-ние 50а), равна:

$$h = \frac{9{,}8 \times 4^2}{2} = 9{,}8 \times 8 = 78{,}4 \text{ м.}$$

75. Вопросы и задачи.

1. Написать уравнения (у-ние 49) для движения, в котором ускорение равно 20 м./сек.^{2}.

2. Сколько времени железнодорожный сторож употребляет для того, чтобы омотреть путь длиною 100 м., делая в среднем в час 3,3 км.?

3. Для условий задачи 2 (§ 74) найти: а) на каких расстояниях от основания башни предмет был в конце первой, второй и третьей секунд; б) найти расстояния, пройденные в каждую из секунд.

4. Поезд электрической железной дороги, выйдя со станции, развивает скорость 36 км. в час на расстоянии 250 м. Чему равно ускорение в м. в сек. в сек.?

5. Выразить ускорение 2 м. в сек.^{2} ускорением в км. в час и в сек.

ГЛАВА XI.

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДВИЖЕНИЕМ И СИЛАМИ.

76. Зависимость между ускорением и силой, сообщающей это ускорение. Возьмем какое-нибудь тело и приложим к нему силу F. Пусть эта сила сообщит ускорение w. Другая сила F_1, приложенная к тому же телу, сообщит ускорение w_1. Так как сообщение ускорения есть непосредственное следствие действия сил, то величиной ускорения мы можем пользоваться для суждения о величинах сил, считая, что при действии на одно и то же тело силы пропорциональны сообщаемым ими ускорениям, т. е.

$$\frac{F}{w} = \frac{F_1}{w_1} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (52)$$

Это отношение дает понятие о том, насколько легко тело поддается действию сил, что будет зависеть от вещества или материи, образующей тело.

Величину отношения (52) называют массой тела; обозначая ее через m, получим:

$$\frac{F}{m} = w \text{ или } F = mw. \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (53)$$

Это весьма важное в динамике уравнение, связывая силу, массу и ускорение, показывает, что сила равна произведению массы тела, к которому сила приложена, на ускорение, сообщаемое ею.

Массу тела можно найти по весу его. Свободное падение тела совершается под действием его веса — P, причем вес сообщает упомянутое выше ускорение — g; поэтому на основании уравнения (53) можем написать:

$$P = mg \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (54)$$

откуда

$$m = \frac{P}{g} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (54a)$$

а потому

$$F = \frac{P}{g} w. \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (55)$$

П р и м е р ы.

1. Какое ускорение сообщит сила 25 кгр. телу весом 10 кгр.? Здесь $P = 10$ кгр., $F = 25$ кгр., а потому (принимая $g = 9{,}8$ м./сек.)

$$25 = \frac{10}{9{,}8} w \text{ и } w = \frac{25 \times 9{,}8}{10} = 23{,}5 \text{ м./сек.}^2.$$

Уравнение (53) или (55) в сочетании с уравнениями (49) дает возможность решать все вопросы, относящиеся к равноускоренному движению тел в тех случаях, когда тела движутся, выходя из состояния покоя. Так как рассматриваемое движение происходит по прямой линии и совершается с постоянным ускорением, то сила, производящая такое движение, есть сила п о с т о я н н а я, совпадающая по направлению с направлением движения; таким же образом направлена и скорость движения.

2. Автомобиль весом 1.000 кгр. развивает скорость в 27 км. в час в течении $^1/_6$ мин. Найти: а) силу, необходимую для этого; б) время, в течение которого будет приобретена указанная скорость и в) расстояние, на котором это произойдет.

П р и м е ч а н и е. В задание входят различные единицы времени: часы и мин.; на это следует обратить внимание при производстве подсчетов.

Рассматривая уравнения (49), видим, что из второго можно найти ускорение w, которое выражается в м. в сек.². Имеем:

$$w = \frac{v}{t} = \frac{27 \text{ км. в час}}{^1/_6 \text{ мин.}} =$$

$$= \frac{27 \times 1000}{3600} \text{ м./сек. : 10 сек.} = \frac{27 \times 1000}{3600 \times 10} = 0{,}75 \text{ м./сек.}^2.$$

У-ние: $s = \frac{wt^2}{2}$ дает

$$s = \frac{0{,}75 \times 10^2}{2} = 37{,}5 \text{ м.}$$

Сила (у-ние 55) равна

$$F = \frac{P}{g} w = \frac{1000}{9{,}8} \times 0{,}75 = \backsim 76{,}7 \text{ кгр.}$$

77. Равнопеременное движение тела, имеющего начальную скорость. При выводе уравнений в § 73 мы предполагали, что тело, к которому была приложена данная сила, находилось перед тем в покое. Пусть имеем тело, оживленное некоторой скоростью v_0, и приложим к нему п о с т о я н н у ю с и л у, с о в п а д а ю щ у ю п о н а п р а в л е н и ю с н а п р а в л е н и е м с к о р о с т и т е л а и равную: $F = mw = \frac{P}{g} w$ (у-ние 55). Мы можем приложить также несколько сил, но

тогда все наши соображения должны относиться к их равнодействующей, которая должна удовлетворять только что высказанному условию: быть силой постоянной, направленной по той же прямой, что и скорость тела.

Какое движение получится? Сила будет сообщать ускорение по направлению скорости тела; следовательно, движение будет оставаться прямолинейным. Сила постоянна, а потому она сообщит постоянное ускорение такое же, какое она сообщила бы, если бы тело находилось в покое. Такое постоянство ускорения будет следствием независимости действия сил от состояния тела или от действия других сил, о чем упоминалось выше (§ 17). В этом состоит второе начало механики Ньютона.

Таким образом мы получим движение с постоянным ускорением или равнопеременное.

В каждую единицу времени скорость v_0 будет изменяться на величину ускорения w, увеличиваясь на эту величину, если сила действует по направлению v_0, и уменьшаясь, если сила направлена против v_0. В последнем случае w будет иметь отрицательную величину. Через t секунд после начала действия силы начальная скорость v_0 изменится на wt, и мы получим скорость v в конце t секунд, равной:

$$v = v_0 + wt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55а)$$

Так, напр., если $v_0 = 40$ м. в сек. и сила, действуя против v_0, сообщает ускорение 12 м./сек.², т. е. $w = -12$ м./сек.², то $v = 40 - 12\,t$.

У-ние (55а) показывает, что скорость можно рассматривать состоящей из двух частей: одной — v_0 постоянной, удерживаемой телом по инерции, и другой — wt переменной, имеющей свое происхождение в силе, приложенной к телу.

Расстояние, проходимое телом, также выражается соответственно двумя слагаемыми: $v_0 t$ (согласно с уравнением 46), и $\frac{wt^2}{2}$ (у-ние 49), а потому:

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2}.$$

Таким образом, для рассматриваемого случая равнопеременного движения имеем следующие уравнения:

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56а)$$

$$v = v_0 + wt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56б)$$

$$F = mw \text{ или } F = \frac{P}{g} w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56в)$$

Движение получится равноускоренным, если w совпадает по направлению с v_0 (в этом случае берем знак +) и равнозамедленным, если w обратно v_0 (берется знак -). Если $v_0 = 0$, получим уравнения (49), найденные выше. Оба эти движения представляют случаи равнопеременного движения; равнозамедленное движение есть равнопеременное движение с отрицательным ускорением.

Примеры. 1. Поезд идет со скоростью 36 км. в час. Машинист прибавил пару и сообщил ускорение 0,25 м. в сек. в сек.

а) Какой величины достигнет скорость поезда в конце 8-й секунды?

В у-нии (56б)

$$v_0 = 36 \text{ км. в час} = 10 \text{ м. в сек.}, \ w = 0{,}25 \text{ м. в сек.}^2 \text{ и } t = 8 \text{ сек.};$$
$$v = 10 + 0{,}25 \times 8 = 12 \text{ м. в сек.}$$

б) Каков путь, пройденный поездом за эти 8 секунд?

Применяя у-ние (56а), получаем:

$$v = 10 \times 8 + \frac{0{,}25 \times 8^2}{2} = 88 \text{ м.}$$

2. На протяжении 1.000 м. скорость движущегося тела изменилась с 66 м. в сек. на 22 м. в сек. Чему равно ускорение и соответствующее время?

В у-ниях (56а и б) имеем данными: $s = 1000$ м., $v_0 = 66$ м. в сек., $v = 22$ м. в сек. и искомыми: w и t.

Определим t из второго уравнения и подставим в первое;

$$t = \frac{v - v_0}{w},$$

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{w} + \frac{w}{2} \times \frac{(v - v_0)^2}{w^2} =$$

$$= \frac{vv_0 - v_0^2}{w} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2w} =$$

$$= \frac{2vv - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2w} = \frac{v^2 - v_0^2}{2w};$$

отсюда

$$w = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{22^2 - 66^2}{2 \times 1000} = -1{,}936 \text{ м. в сек.}^2.$$

Знак — показывает, что движение замедленное ($v < v_0$).

Время

$$t = \frac{22 - 66}{-1{,}936} = \frac{-44}{-1{,}936} = \frac{44}{1{,}936} = 22{,}7 \text{ сек}$$

3. Найти силу, увеличивающую скорость поезда, если вес его 1.200 тонн, при данных примера 1. По у-нию (56в):

$$F = \frac{1200}{9{,}8} \times 0{,}25 = \backsim 30{,}6 \text{ тонн.}$$

78. Движение тел, брошенных по вертикальному направлению. Частным случаем только что рассмотренного движения будет движение тел, брошенных по вертикальному направлению вниз или вверх, с некоторой начальной скоростью v_0.

В этом случае ускорение w приобретает частное значение g, т. е. $w = g$; мы будем иметь следующие три уравнения, причем расстояние вместо s обозначено через h:

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad \text{(57а)}$$

$$v = v_0 + gt \quad \text{(57б)}$$

$$P = mg \quad \text{(57в)}$$

Действующей силой является вес тела. Движение будет ускоренным, если тело брошено вниз и замедленным (с отрицательным ускорением), если тело брошено вверх. В последнем случае перед членами, содержащими g, берем знак минус, причем получим:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{(58а)}$$

$$v = v_0 - gt \quad \text{(58б)}$$

$$P = mg \quad \text{(58в)}$$

П р и м е р. Шарик брошен вверх по вертикальному направлению со скоростью 28 м. в сек. Через сколько секунд скорость шарика сделается равной нулю?

В у-нии (58б) $v = 0$, а потому

$$28 - 9{,}8 \times t = 0,$$

откуда

$$t = \frac{28}{9{,}8} = 2{,}9 \text{ сек.}$$

79. Вопросы и задачи.

1. Из каких двух движений составляется равнопеременное движение, если тело до начала действия на него силы, имеет некоторую скорость?

2. Машинист повернул рукоятку тормаза при скорости поезда, равной 72 км. в час (20 м. в секунду); по истечении 20 сек. скорость уменьшилась до 36 км. в час (10 м. в сек.). Найти замедление (отрицательное ускорение).

3. В предыдущей задаче найти: а) путь, который прошел поезд; б) путь до полной остановки.

4. При взрыве котла кусок стенки его полетел вертикально вверх со скоростью 29,4 м. в сек. Как высоко находился кусок в конце второй секунды? На какую высоту он поднялся вверх?

5. Электрический кран поднимает маховое колесо, весящее 10 тонн, с ускорением в 0,5 м. в сек.². Чему равно усилие в подъемном канате?

6. Колесо (задача 5) начинают останавливать с замедлением, равным 0,75 м. в сек.². Найти усилие, растягивающее подъемный канат.

7. Резервуар высотой 21 м. наполнен водой. Какова будет скорость истечения воды через отверстие при его основании? (Допустить, что давление тратится только на сообщение скорости).

8. Взяв уравнение (58а и 58б) вывести формулу для высоты h подъема тела, брошенного вверх.

9. Показать на основании уравнений (58) следующее: а) тело, брошенное вверх, при возвращении в точку бросания имеет ту же скорость, с которой оно было брошено вверх; б) время подъема равно времени падения.

10. Количество движения. Количеством движения точки, обладающей массой m (или весом $P = mg$) называют произведение — mv. В начале движения, когда v_0 равно нулю, начальное количество движения — mv_0. Найдем приращение $(mv - mv_0)$ в зависимости от силы, действующей на точку, и от времени действия ее.

Умножив первую часть у-ния (56б) на m, а вторую часть того же уравнения на равную m величину $F:w$, получим:

$$mv - mv_0 = wt \times \frac{F}{w} = Ft \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Произведение Ft называют импульсом силы. Уравнение (59) находит применение для решения частных вопросов. Определить силу, необходимую для торможения поезда при данных задачи 2.

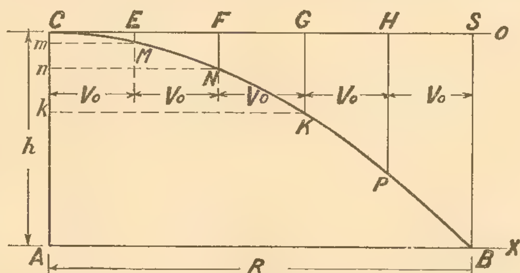
ГЛАВА XII.

СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ.

80. Движение тел, брошенных по горизонтальному направлению. Все случаи движения тел, рассмотренные нами до сих пор, совершались под действием сил, совпадающих с направлением движения тела. Так, мы видели, что тело, брошенное вертикально, двигается вверх по прямой линии до известной высоты, после чего начинает движение вниз по той же прямой.

Положим, что тело брошено по горизонтальному направлению.

Подчиняясь началу инерции (§ 72), тело будет продолжать свое движение с постоянной начальной скоростью по прямой линии. Но тело подвержено действию собственного веса*), причем сила эта образует угол с направлением начальной скорости тела. По началу независимости действия сил (§ 17) вес тела будет сообщать ему постоянное ускорение g, что приведет к ускоренному дьижению тела по вертикальному направлению.



Фиг. 62. Движение тела, брошенного горизонтально.

Посмотрим, как будет перемещаться тело под влиянием указанных обстоятельств.

Пусть (фиг. 62) тело брошено в горизонтальном направлении из точки C со скоростью v_0 м. в сек. Если бы на тело не действовала сила тяжести, то в конце первой секунды движения тело было бы в точке E, на расстоянии v_0 от C, равном численно v_0, т. е. v_0 м./сек. $\times$ 1 сек. Сила тяжести в течение той же секунды заставит тело опуститься вниз на расстояние $h_1 = EM$,

*) Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

которое найдем из у-ния (50): $h = \frac{gt^2}{2}$, подставив в него $t = 1$, причем получим $h_1 = {}^1/_2 g = 4{,}9$ м.

Таким образом в конце первой секунды тело будет в точке M, лежащей на 4,9 м. ниже точки E. В конце второй секунды тело было бы в точке F, если бы оно обладало только прежней начальной скоростью. Но оно за две секунды пройдет вниз расстояние

$$h_2 = \frac{g \times 2^2}{2} = 2g = 19{,}6 \text{ м.}$$

и будет в точке N, на 19,6 м. ниже F. В конце третьей секунды тело будет в точке K на $\frac{9}{2}g$, т. е. на 44,4 м. ниже G. Соединив полученные точки M, N, K и т. д. плавной кривой, мы найдем форму пути, описанного телом, или траекторию движения.

81. Сложение движений. Пример, рассмотренный в предыдущем параграфе, позволяет вывести общее правило сложения движений. Если бы тело, вышедшее из C (фиг. 62), двигалось только по горизонтальной линии, то оно в конце одной, двух, трех и т. д. секунд постепенно занимало бы положение E, F, G и т. д. Если бы то же тело совершало свое движение только по вертикальному направлению, оно было бы в конце тех же промежутков времени последовательно в m, n, k и т. д. В действительности, имея два движения, оно проходило точки M, N, K и т. д., двигаясь по криволинейному пути $CMNK$.. ..или, что то же, описывая криволинейную траекторию $CMNK$.... Не трудно видеть, что M — есть конец диагонали прямоугольника, составленного из перемещений CE и Cm, причем прямолинейный отрезок CM представляет собою хорду участка траектории; то же относится к отрезкам Cn и CF и т. д. Таким образом, мы видим, что два составляющие движения складываются в одно составное по следующему правилу: хорда составного перемещения есть диагональ параллелограмма, построенного на составляющих перемещениях. Предполагаем последние прямолинейными. В фиг. 62 составляющие движение шли под прямым углом друг к другу; очевидно, изложенные рассуждения применимы к движениям, совершающимся под каким угодно углом друг к другу. Вместе с тем мы видим пример получения из двух прямолинейных движений — криволинейного. Движение по кривой линии возникает во всех тех случаях, когда сила, приложенная к телу, образует угол с направлением скорости тела.

Для того, чтобы при наличности двух движений иметь определенное указание, о каком из них идет речь, расстояния

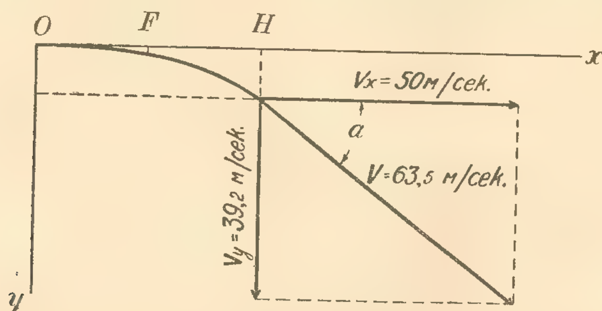
в одном обозначают через x, в другом через y, а самые направления (или оси) через Ox и Oy, скорости же через v_x и v_y. Таким образом, в фиг. 62 можем направить ось Cx горизонтально, ось Cy — вертикально вниз. Зависимости расстояний от времени в них выражаются так:

$$\left.\begin{array}{l} \text{для оси } Ox: x = v_0 t \text{ и } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{для оси } Oy: y = \dfrac{gt^2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (59a)$$

Для скорости по каждой из осей берут обозначения v_x и v_y. Соответственно с предыдущими у-ниями получим:

$$v_x = v_0 \text{ и } v_y = gt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59б)$$

82. Сложение скоростей. В фиг. 62 сила тяжести сообщает телу ускорение по своему направлению, а следовательно известную скорость под углом к скорости, имевшейся у тела. В результате тело обладает двумя скоростями: одной (в данном случае постоянной) по направлению CO и другой (постепенно и равномерно возрастающей) по CA. В действительности тело движется, конечно, с одной определенной скоростью, которая может быть найдена путем сложения скоростей отдельных движений или, что то же, составляющих скоростей по правилу: скорость



Фиг. 63. К фиг. 62.

составного движения или составная скорость по величине и направлению выражается диагональю параллелограмма, построенного на скоростях движений составляющих. Правило это называется параллелограммом скоростей.

В фиг. 62 параллелограмм скоростей вследствие перпендикулярности составляющих скоростей приводится к прямоугольнику. Найдем действительную скорость тела или, что то же, скорость составного движения в конце четвертой секунды, когда тело проходит через точку P, если тело было брошено

горизонтально со скоростью 50 м. в сек. В конце этой секунды скорость вертикального движения (у-ние 59б): $v_y = gt = 9,8 \times 4 = 39,2$ м. в сек. Составная скорость (фиг. 63)

$$V = \sqrt{50^2 + 39,2^2} = \sqrt{2500 + 1537} = \sqrt{4037} = 63,5 \text{ м. в сек.}$$

Угол a, образуемый скоростью V с горизонтом, определим из выражения, подобного выведенному выше для сил (§ 10)

$$\operatorname{tg} a = \frac{39,2}{50} = 0,784,$$

$$a = 38^0 6'.$$

Вообще, если тело имеет две скорости по направлениям Ox и Oy, причем Oy и Ox взаимно перпендикулярны, то составная скорость найдется из выражения

$$V^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Рассматривая только что изложенные правила сложения скоростей, мы видим полное сходство их с правилами сложения сил, а потому можем, не приводя новых доказательств, перенести на скорости все те выводы, которые были найдены для сил. Мы получим следующие правила для сложения и разложения скоростей: треугольник скоростей (§ 24) и многоугольник скоростей (§ 25).

После этих замечаний читатель не затруднится разобраться в движении тела, брошенного под углом к горизонту (см. ниже задачу 13).

83. Вопросы и задачи.

1. Чем выражается действие сил на тело? В чем состоит начало независимости действия сил от скорости тела и от действия других сил?

Начало независимости действия сил (§ 17) вместе с началами инерции (§ 72) и реакции (§ 18) составляют основные начала или законы механики, высказанные Ньютоном. Формулировать точно начала инерции и реакции.

2. Гребец двигает лодку поперек реки со скоростью 6 верст в час. Скорость течения, которое его сносит, равна двум верстам. Под каким углом должна идти лодка, чтобы пристать в точке, противоположной точке отвала.

3. С какой скоростью лодка пересекает реку?

4. Если ширина реки равна 100 саж., то в какое время лодка пересечет реку?

5. В чем состоит правило сложенія движений?

6. Если вместо сил в фиг. 20 данные отрезки обозначают скорости, как найти составную скорость? Чем она выражается на чертеже?

7. Скорость подъема некоторого груза мостовым краном равна 100 м. в мин., ферма крана передвигается вдоль мастерской со скоростью 40 м. в мин. Найти составную скорость движения груза.

8. Найти время полета тела из точки C (фиг. 62) до точки B.

9. Найти дальность полета тела (фиг. 62), т.е. расстояние AB.

10. Гибкая лента для подачи угля расположена горизонтально на высоте 29,4 м. от основания угольной ямы. Уголь соскальзывает с ленты

с горизонтальной скоростью 7 м. в сек. Через какой промежуток времени уголь достигнет дна ямы?

11. Найти горизонтальное расстояние (см. задачу 10), на которую удалится уголь от края ленты въ момент падения на дно ямы.

12. Найти величину и направление скорости угля в момент падения.

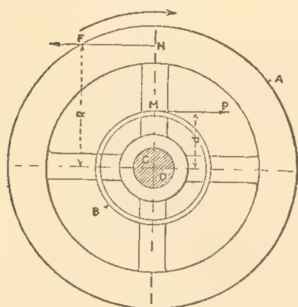
13. Найти выражения для расстояний и скоростей тела, брошенного под углом a к горизонту со скоростью v_0.

14. Пользуясь выводом предыдущей задачи, решить следующую: вследствие чрезмерного увеличения числа оборотов машины маховик ее разлетелся на куски. Один из них в момент разрыва имел скорость 40 м. в сек., направленную вверх относительно горизонта под углом в 45^0. Найти дальность полета его.

ГЛАВА XIII.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

84. Равномерное движение тела по кругу. Вращательное движение находит частое применение в машинном деле; так, существует целый ряд машин, доставляющих вращение: паровые машины, двигатели внутреннего горения, ряд передаточных механизмов: ремни, зубчатые колеса и т. д.



Фиг. 64. Маховое колесо.

Возьмем точку N (фиг. 64) на ободе маховика A и найдем зависимость между скоростью ее v, которая направлена по касательной, и числом оборотов маховика в минуту n. Последняя величина входит обыкновенно как одна из данных конструкции машин, служащих для передачи вращения.

Если средний радиус маховика R, то точка N при n оборотах в минуту пройдет путь $s = 2\pi rn$, а в секунду $\frac{2\pi rn}{60}$. Эта величина представит окружную скорость или линейную скорость на ободе маховика, т.е.

$$v \quad \frac{2\pi rn}{60} \text{ м. в сек.} \qquad (61)$$

Пример. Длина кривошипа паровой машины (до средины пальца его) равна 200 мм. Если машина делает 300 оборотов в минуту, то какова будет скорость вращения пальца кривошипа?

В у-нии (61) $r = 200$ мм. $= 0{,}2$ м.; $n = 300$, а потому

$$v = \frac{2 \times 3{,}14 \times 0{,}2 \times 300}{60} = 6{,}28 \text{ м. в сек.}$$

2. Ход поршня машины равен 50 см. $= 0{,}4$ м. Если машина делает 240 оборотов в минуту, чему равна средняя скорость поршня в м. в сек.?

В течение одного оборота машины поршень дважды пройдет вдоль цилиндра, т. е. пройдет расстояние $0{,}4 \times 2 = 0{,}8$ м. Средняя скорость его численно равна расстоянию, пройденному в секунду, т. е. $\frac{0{,}8 \times 240}{60} = 3{,}2$ м. в сек.

3. Какова скорость движения ползуна машины: постоянная или переменная, при равномерном (теоретически) вращении маховика (фиг. 14)?

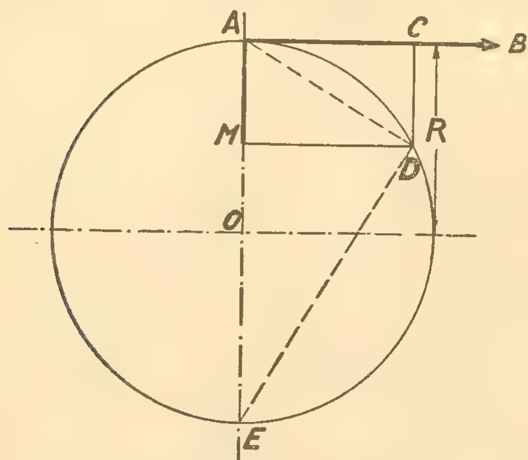
Скорость ползуна — величина переменная. Она изменяется от нуля при положении поршня в мертвой точке до некоторого максимума, когда шатун и кривошип образуют угол близкий к прямому, после чего эта скорость опять уменьшается до нуля по мере того, как поршень приближается ко второй мертвой точке.

85. Центростремительная сила. Согласно с законом инерции (§ 72) всякое тело, предоставленное самому себе, движется прямолинейно. Если мы видим, что тело движется по кругу, мы заключаем, что должна существовать какая-то сила, которая удерживает его на этом криволинейном пути. Так, камень, привязанный к веревке, при вращении удерживается на определенном расстоянии от центра вращения, благодаря силе, оказываемой на него со стороны веревки (сила связи, §§ 18 и 19). Если веревка разорвется и сила, ею развиваемая, прекратит свое действие на камень, то он немедленно станет двигаться прямолинейно, удаляясь от центра вращения. Подобным же образом при поломке махового колеса его части будут стремиться двигаться по прямым линиям; в действительности части уклонятся от такого движения вследствие действия на них силы тяжести.

Найдем ту силу, которая удерживает тела в движении по кругу.

Пусть точка A (фиг. 65) вращается с некоторой постоянной линейной скоростью v около точки O. Если точка движется по кругу, то искомая сила развивается связью OA. Сила эта называется ц е н т р о с т р е м и т е л ь н о й; она не позволяет телу отойти от центра O. Так как движение тела, согласно со сказанным выше, равномерное, то сила эта не может иметь составляющей по направлению движения тела, т. е. по касательной в каждой данной точке окружности. Искомая сила должна быть, следовательно, направлена перпендикулярно к касательной в любой точке тела, т. е. по радиусу или, что то же к ц е н т р у вращения. Если бы точка A стала свободной, то она начала бы двигаться по линии AB, касательной к кругу в A и по истечении некоторого промежутка времени была бы в точке C. В действительности же точка C приблизится к центру круга и окажется в D, причем CD, парал-

лельно AM, так как сила, производящая перемещение $CD = AM$, есть сила центростремительная, действующая в A. Соединим точки A и D прямой линией. Если расстояние AD мало, то дуга AD и хорда AD практически равны. Если расстояние AD пройдено точкой A в промежуток времени t сек., то $AD = v \times t$. Обозначим через u ускорение, с которым точка A движется к центру O. Тогда расстояние AM равно $\frac{ut^2}{2}$ (у-ние 55).



Фиг. 65. Круговое движение.

Проводя линии AE и DE, находим подобные треугольники ADM и ADE, так как их углы соответственно равны между собой; следовательно, соответственные стороны их пропорциональны, а потому

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AM}{AD} \text{ или } AD^2 = AM \times AE.$$

Но $AD = vt$, $AM = \frac{ut^2}{2}$ и $AE = 2r$, если r — радиус круга. Подставляя эти значения в последнее уравнение, получим:

$$v^2t^2 = {}^1/_2 ut^2 \times 2 \times r$$

или

$$v^2 = ur$$

и

$$u = \frac{v^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Обозначим центростремительную силу через C; тогда по у-нию (55) при замене F через C и w через u, получим:

$$C = \frac{P}{g} u = \frac{Pv^2}{gr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

86. Центробежная сила. По началу равенства действия и противодействия (§ 18) каждая сила имеет парную силу, т. е. силу, обратно ей направленную и равную по величине. В случае, разобранном в предыдущем параграфе, такая сила растягивает веревку, удерживающую камень на определенном расстоянии от центра вращения. Она направлена от центра и потому ей присваивают название центробежной силы.

Численно она равна силе центростремительной (у-ние 63). Натяжение веревки передается в центр вращения в точку закрепления ее; последняя испытывает переменные по направлению усилия. Такие же усилия получатся при вращении какого-либо груза, закрепленного на стержне, а также в подшипниках коленчатого вала машины и, вообще, в случае тел, не уравновешенных относительно оси вращения. Уравновешение производят посредством противовесов, располагаемых на противоположной стороне от оси вращения. По тем же соображениям шкивы, маховики и т. п. должны быть точно балансированы. Центробежная сила действует до тех пор пока данная связь цела; по разрыве ее, как центростремительная, так и центробежная силы исчезают, и тело по и н е р ц и и движется по направлению касательной в точке разрыва связи, причем v определяется выражением (61).

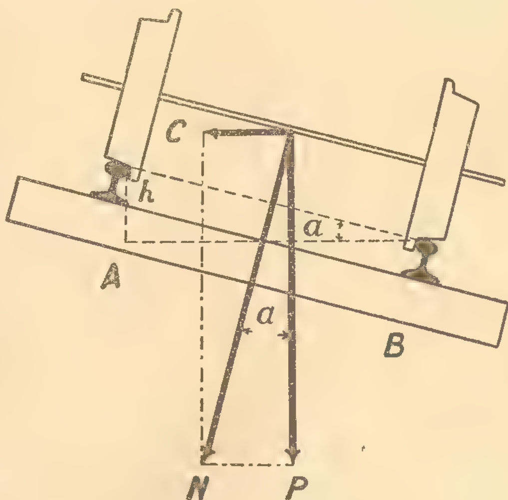
87. Вопросы и задачи.

1. Точка N колеса A (фиг. 64) находится на расстоянии 1 м. от оси. Колесо начинает двигаться из состояния покоя и в конце двух минут делает 75 обор. в минуту. Найти линейное ускорение точки N в м. в сек. в сек.

2. Какая сила P, действующая в течение $1^1/_2$ минуты на расстоянии 2 фут. от центра колеса, будет в состоянии привести его в движение со скоростью 90 оборотов в минуту; весом втулки и спиц пренебречь, вес же обода колеса радиусом 5 фут. 8 дм. равен 89 пуд.

3. Маховое колесо диаметром 3 м. делает 100 оборотов в минуту. Найти центростремительное ускорение.

4. Ширина обода махового колеса равна 10 см., а толщина обода 8 см. Чему равна центробежная сила, приходящаяся на сантиметр длины обода, при данных предыдущей задачи?



Фиг. 66. Вагон на закруглении ж. д. пути.

5. Колесо вращается, делая 1.500 оборотов, причем имеет неуравновешенный груз весом 2 кгр. на расстоянии 45 см. Найти давление, производимое грузом на подшипники.

6. Радиус закругления железнодорожного пути равен 200 м.; расстояние между рельсами $в$ — 1,5 м. (фиг. 66). Найти такое возвышение внешнего рельса A над внутренним B, при котором для скорости 36 км. в час давление колес на рельсы было бы перпендикулярным к ним.

7. Рассматривая вращательное движение, иногда говорят: центробежная сила уравновешивает центростремительную. Правильно ли это?

ГЛАВА XIV.

РАБОТА И МОЩНОСТЬ.

88. Понятие о работе. Работа при подъеме грузов. Если сила, двигая какое-либо тело, встречает в направлении своего действия некоторое сопротивление движению, то говорят, что она производит работу. Примером может служить подъем грузов посредством рычага (фиг. 45) или блока (фиг. 51), где поднимаемый груз является полезным сопротивлением, а сила трения — вредным сопротивлением. Движущее усилие, преодолевая то и другое, совершает работу. Лошадь, двигающая груженую телегу, производит работу; производит ее пар в цилиндре машины, который давлением на поршень преодолевает сопротивление, приложенное на валу машины.

Работа, производимая различными двигателями, может быть больше или меньше, изменяясь в тех или других пределах. Необходимо установить, как измерять ее. Напомним, что при измерении каких-либо величин, напр., расстояний, скоростей, сил и т. д. прибегают к сравнению их с однородными величинами, принятыми за единицы измерения. Точно так же работу нужно измерять какой-либо работой, принятой за единицу работы. Для выбора такой единицы весьма удобно обратиться к работе, совершаемой при подъеме грузов. При этом существенную роль играют два обстоятельства: вес поднимаемого груза и высота поднятия. Какой бы груз мы ни взяли, но если мы не переместим его на некоторую высоту, то никакой работы не совершим. Отсюда ясно, что для такой работы, которую мы будем считать за единицу и применять ее далее для измерений, нужно установить отдельно вес груза и высоту подъема. В русских мерах берут соответственно пуд и фут. При таких единицах работу, производимую при подъеме одного пуда на высоту одного фута, называют пудофутом, причем работа эта равна произведению пуда на фут или 1 пуд $\times$ 1 фут = = 1 пудофут.

В метрической системе мер, где за единицу длины принят метр, равный приблизительно 39,4 дм. или 3,3 фут., а за

единицу веса килограмм (1000 грамм), равный 2,44 фун., единицей работы является работа при подъеме одного килограмма на высоту одного метра или один килограмметр = = 1 кгр. м. Кгр. м. равен $2,44 \times 3,3 = 8,05$ фунтофут (фн. фут.) = $\backsim$ 0,2 пудофута.

Примечание. Знак $\backsim$ обозначает приблизительное равенство.

Если мы поднимем, напр., 2 кгр. на 0,5 м., то работа, нами выполненная, будет также 1 кгр.м., а именно: 2 кгр. $\times$ 0,5 м. = $= 2 \times {}^1/_2$ кгр. м. = 1 кгр. м.

Мы получим также 1 кгр.м. при подъеме 5 кгр. на 0,2 м. При подъеме 5 кгр. на 3 м. получим $5 \times 3 = 15$ кгр.м. Когда нам скажут, что некоторая работа равна 15 кгр.м., то мы еще не знаем, какой груз и на какую высоту был поднят. Возможны, напр., такие случаи: 5 кгр. на 3 м., 2 кгр. на $7^1/_2$ м., 0,5 на 30 м. и т. д. Веса и высоты различны, а работа во всех случаях этих будет одна и та же — 15 кгр.м.

Из всего сказанного следует, что если какой-либо груз p был поднят на высоту h, то работа

$$T = ph \qquad (64)$$

89. Работа постоянной силы, совпадающей с направлением перемещения. Только что рассмотренный прием измерения работы можем применить для случая перемещения тел по какому угодно направлению, так как силу или усилие, которое при этом прилагается, мы можем выразить также в единицах веса. Так, напр., если для передвижения какого-либо предмета, напр. камня, положенного на деревянные катки, железнодорожного вагона по рельсам и т. п. будет приложено общее усилие нескольких рабочих, равное в сумме 160 кгр., и перемещение произойдет на 8 метр., то работа будет равна $160 \times 8 =$ $= 1280$ кгр. м.

При совершении некоторой силой F работы на расстоянии s, согласно со сказанным выше, можем написать:

$$T = Fs \qquad (65)$$

При этом предполагается, что сила постоянна по величине и направление ее совпадает с направлением перемещения точки приложения ее.

Обратим внимание на то, что элемент времени в понятие работы не входит; так, при поднятии груза в 500 кгр. на высоту 5 м. нужно совершить работу в 2.500 кгр. независимо от того, поднят ли груз в несколько минут или часов.

Было сказано, что при работе сила преодолевает известное сопротивление. Не следует величину этого сопротивления

смешивать с весом движущегося тела, так как только в частном случае, когда поднимают тело вверх по вертикальному направлению, преодолеваемое сопротивление действительно равно весу тела. При приведении, напр., вагонетки в движение по горизонтальному пути, требуемое (рабочее) усилие будет равно силе трения между ее колесами и рельсами. Сила же трения значительно меньше полного веса вагонетки.

Примеры.

1. Полный вес черпака с углем равен трем тоннам. Какая работа в кгр.м. будет совершена при подъеме его на высоту 15 метров?

Усилие равно 3.000 кгр., высота подъема — 15 м., следовательно, работа

$$T = 3000 \times 15 = 45000 \text{ кгр.м.}$$

2. Найти работу, совершаемую кочегаром, двигающим вагонетку с углем весом 500 кгр. через кочегарку длиною 40 м. Коэффициент трения между колесами вагонетки и рельсами — 0,05.

Кочегар должен развивать усилие, равное силе трения (§ 47) $F = fN$, а потому работа

$$T = Fs = fNs = 0{,}05 \times 500 \times 40 = 1000 \text{ кгр.м.}$$

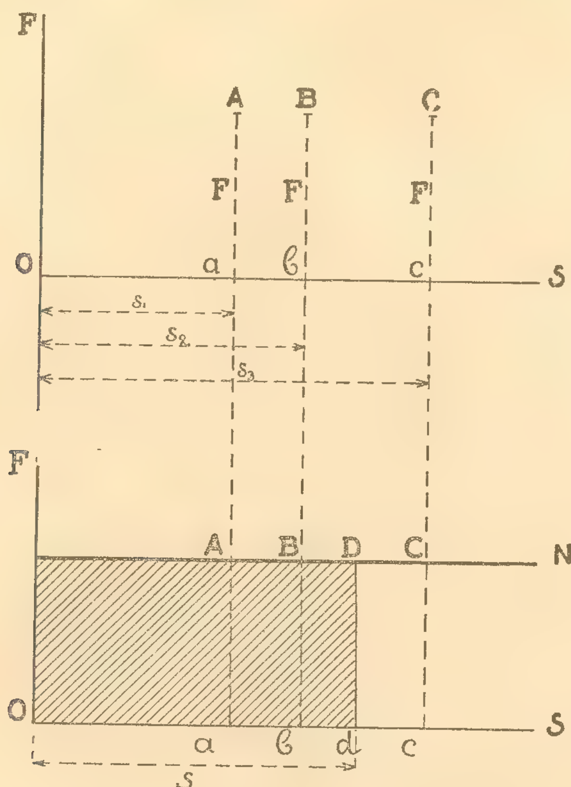
90. Графическое изображение работы. Во многих случаях работу для практических и теоретических соображений удобно изображать графически на чертеже подобно тому, как графически изображают расстояния. Но при этом нужно иметь в виду, что в выражение работы входят две величины, или, как говорят, два фактора: сила и расстояние (длина).

Рассмотрим случай движения некоторого тела под действием приложенной к нему постоянной силы F. Возьмем две взаимно перпендикулярных оси (фиг. 67). По горизонтальной оси будем откладывать расстояния s, проходимые точкой приложения силы, а по вертикальной оси — силы F. Следовательно, горизонтальная ось Os будет осью расстояний, а вертикальная ось OF — осью сил. И расстояния и силы отмеряются от точки пересечения или начала осей — O.

В случае постоянной силы для разных расстояний, пройденных телом, — s_1, s_2, s_3 . . . и т. д. будем иметь одну и ту же силу; следовательно, точки A, B, C будут лежать на линии AN, параллельной оси Os (фиг. 68).

Точки этой линии будут давать для любого расстояния величину силы (в данном случае постоянной); так, для некоторого расстояния s (отрезок Od) имеем точку D и силу F, измеряемую отрезком dD. Так как работа выражается произведением F на s, то из чертежа видно, что работа эта числен-

н о выражается площадью заштрихованного прямоугольника. Это значит, что прямоугольник этот заключает в себе столько квадратных единиц, сколько измеряемая им работа содержит

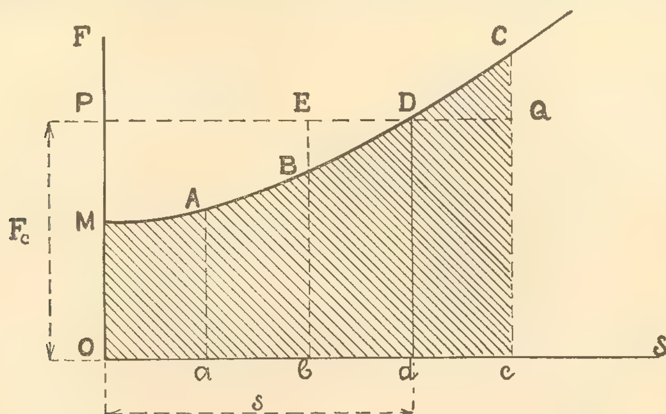


Фиг. 67 и 68. Работа постоянной силы.

единиц работы, и одна квадратная единица прямоугольника равна единице работы — 1 кгр.м.

91. Работа переменной силы. Пусть сила, приложенная к данному телу, совпадает с направлением движения его, но будет переменной по величине. В таком случае для расстояний Oa, Ob, Oc (фиг. 69) будем иметь соответственно силы aA, bB, cC. На чертеже соотношение или зависимость между силами и расстояниями выразится точками A, B, C, которые будут лежать на некоторой кривой линии MC (для точки O сила — OM). В этом случае также можно показать, что работа силы на некотором протяжении графически выразится площадью заштрихованной фигуры $OcCM$.

Измерить площадь такой фигуры и, следовательно, найти работу силы на том или другом протяжении можно, исполнив



Фиг. 69. Работа переменной силы. Среднее усилие.

чертеж на клетчатой бумаге и измерив число клеточек, заключающихся в площади $OcCM$.

92. Средняя величина силы или среднее усилие. Площадь $bBCc$ (фиг. 69), ограниченная сверху криволинейным отрезком BC, может быть приравнена численно равновеликой площади прямоугольника $bEQc$, причем площадка BED равновелика площадке DCQ. Если мы взглянем на площадь $bBCc$ с механической точки зрения, то можем сказать, что она выражает работу некоторой постоянной силы $OP = dD = cQ$ на том же протяжении bc, которое мы имели для переменной силы. Постоянная сила dD будет иметь некоторую среднюю величину по сравнению с наибольшим cC и наименьшим bB значениями переменной силы для данного перемещения bc. На основании этого силу dD называют средней силой или средним усилием на протяжении bc, и обозначают F_c.

Следовательно, работа $T =$ площ. $bBCc$ — площ. $bEQc$ или $=$
$$= F_c \times s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

93. Мощность. Помимо самой величины работы в технике имеет значение время, в течение которого данная работа совершается силой, развиваемой каким-либо двигателем, или быстрота совершения работы. Быстроту совершения работы называют мощностью данного двигателя.

Если одна и та же работа может быть одним двигателем доставлена, напр., в пять раз скорее, чем другим, то первый двигатель будет в пять раз мощнее.

Мощность какого-либо двигателя выражают численно величиной работы, которую он может до-

с т а в и т ь в е д и н и ц у в р е м е н и. За такую единицу берут обыкновенно одну секунду. Если, напр., двигатель поднял груз в 900 кгр. на 10 м. в 6 сек., то работа его 900 × 10 = 9000 кгр. м., а средняя мощность за данное время 9000 кгр. м. : 6 сек. = 1500 кгр. м. в секунду (1500 кгр. м./сек.).

Вообще говоря, если определенное количество работы T доставлено двигателем в t сек., то с р е д н я я м о щ н о с т ь N равна $T : t$.

Делением T на t мы находим среднюю мощность за данный промежуток времени. Действительные же мощности в отдельные моменты могут отличаться друг от друга.

Единицей мощности в метрической системе мер служит о д и н к г р. м. в с е к. Обратим внимание на то, что указание времени в данном случае, существенно важно; если иногда не указывают его, то это является неточностью и должно быть избегаемо; делают же это в предположении, что единицей времени служит секунда.

Только что указанная единица мощности: о д и н к г р. м. в с е к. на практике оказывается малой, и для измерений мощности двигателей применяют величину в 75 раз большую, т. е. 75 к г р. м. в с е к. Эту величину называют лошадиной силой, паровой лошадью, или, короче говоря, л о ш а д ь ю (в сокращенном изображении л о ш.).

П р и м е р. В примере 1 предыдущего параграфа работа была найдена равной 45000 кгр.м. Если время подъема равнялось половине минуты, то подъемный механизм обладал мощностью 45000 кгр.м. : 30 сек. = 1500 кгр.м./сек. = 20 лош.

Если бы работа была совершена не в 30 сек., а в две минуты, то мощность равнялась бы 5 лош. Вообще, чем больше времени можно затратить на выполнение определенной работы, тем меньшей мощности может быть двигатель.

94. Вопросы и задачи.

1. Чему равна работа силы тяжести при данных примера в § 78, если вес шарика равен 0,5 кгр.?

2. Представить графически работу в предыдущей задаче.

3. Лошадь тянет повозку с постепенно и равномерно возрастающим усилием, начиная с 1 до $2^1/_2$ пуд. на протяжении 12 саж. Найти: а) среднюю силу тяги, б) работу в пудофут. и в кгр. м.

4. Найти работу и мощность при данных примера в § 62, если тело передвинуто на 60 м. в течение 0,5 мин.

5. Найти работу и мощность при данных примера 1 в § 65 на расстоянии 100 саж., в течение 30 сек.

6. Среднее давление пара на поршень машины равно 3 атм. = 3 кгр. на кв. см. Если диаметр поршня 28 см., а ход его 36 см., то чему равняется работа пара при одном обороте машины при давлении пара, действующем поочередно на каждую сторону поршня.

7. Если в предыдущей задаче машина делает 240 оборотов в минуту, найти мощность ее.

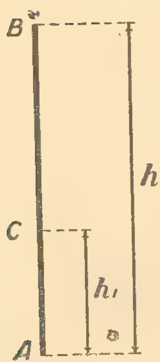
8. Найти мощность, развиваемую трактором при силе тяги 45 пуд. и скорости движения 4,2 вер. в час.

ГЛАВА XV.

ЭНЕРГИЯ.

95. Преобразование работы при движении тела. Остановимся на рассмотрении описанного выше движения тела, брошенного снизу вверх (§ 78), и вникнем в преобразование работы в связи с соответственными ему изменениями скорости движения тела. Это дает нам возможность обобщить понятие о работе.

Тело, брошенное из точки A (фиг. 70) вверх с некоторой скоростью v_0, по мере поднятия вверх постепенно уменьшает ее до тех пор, пока не достигнет высшей точки подъема B, где скорость будет равна нулю. За это время сила тяжести совершит работу, равную $-ph$ (минус ph), где p — вес тела, h — высота подъема; знак минус показывает, что сила действует против направления движения или, иначе говоря, против его скорости; сила тяжести сообщает телу отрицательное ускорение и уменьшает скорость движения тела по вертикали.



Фиг. 70.

При обратном движении тело, придя обратно в точку бросания A, восстановит свою скорость, причем за этот период сила тяжести совершит работу, равную ph. Таким образом тело, находящееся на высоте h, обладает возможностью, благодаря своему положению выше точки бросания, совершить работу при движении вниз; тело при движении вверх з а п а с а е т работу, которую расходует при движении вниз. В зависимости от израсходованного запаса работы тело получает соответственную скорость. Действительно, для движения тела сверху вниз имеем (у-ние 51)

$$v^2 = 2gh.$$

Умножая обе части его на $\frac{p}{g} = m$, где m масса тела, и преобразуя, найдем:

$$\frac{mv^2}{2} = ph \text{ . . . . } (66a)$$

Вместо затраченной работы ph получится соответственное количество $\frac{mv^2}{2}$, куда входят свойства, принадлежащие телу: его постоянная масса $(p : g)$ и скорость в данное мгновение в конце перемещения — h. Чем больше m, тем меньше будет увеличение скорости, так как работой ph определяется вся величина $\frac{mv^2}{2}$.

96. Энергия потенциальная и кинетическая. Способности тела совершить работу присваивается название энергии. Тело, находящееся на высоте h, обладает запасом энергии равным ph, что по отношению к низшей точке этой высоты представляет ту энергию, которая может быть превращена в работу. Эту энергию называют потенциальной энергией.

Тело по мере падения расходует ее и приобретает вместо нее соответственное количество так наз. энергии движения или энергии кинетической, измеряемой величиной $K = \frac{mv^2}{2}$. Эту величину называют также живой силой.

97. Сохранение энергии. Если мы рассмотрим какое-либо промежуточное положение C тела между A и B (фиг. 70), то для него будем иметь: а) запас потенциальной энергии относительно точки $A : \Pi = ph_1$; б) количество кинетической энергии K в теле, определяемое выражением (66а), в котором вместо h вводим $(h - h_1)$; скорость в C обозначаем через v_1:

$$\frac{mv_1^2}{2} = p(h - h_1).$$

Сумма $\Pi + K$ равна

$$ph_1 + \frac{mv_1^2}{2} = ph_1 + p(h - h_1) = ph,$$

т. е. сумма эта, которую обозначим через Э и которую называют полной энергией тела, для данного тела при описанных условиях величина постоянная, т. е. $Э = \Pi + K$.

При движении тела совершается лишь переход энергии одного вида в другой, но энергия не исчезает и не появляется вновь.

Изложенные выводы, перенесенные на всю совокупность тел природы, приводят к закону сохранения энергии, согласно с которым:

1. Количество энергии во вселенной есть величина постоянная.

2. Энергия не может появиться вновь или исчезнуть.

3. Энергия может переходить из одной формы в другую. Если какая-либо сила совершает определенную работу, то кинетическая энергия тела, к которому сила приложена, увеличивается на величину, равную работе силы.

98. Вопросы и задачи.

1. Насос подает 1000 литров воды в минуту на высоту 45 м. Найти мощность насоса в лош.

2. Груз 400 кгр. употребляется для раздробления старых отливок. Если груз поднят на высоту 30 м. над отливками, найти потенциальную энергию груза.

3. Вычислить кинетическую энергию груза (задача 2) в момент, когда груз коснулся отливок, принимая, что он падал, как свободное тело.

4. Пользуясь законом сохранения энергии, показать, что скорость тела, брошенного вверх, в конце падения равна скорости при бросании.

5. Найти соотношение между весом тела, лежащего на наклонной плоскости, и силой, параллельной ей, на основании закона сохранения энергии, пренебрегая трением.

99. Различные формы энергии и превращение энергии из одной формы в другую. В предыдущем параграфе было указано, что энергия не творится вновь и не исчезает. Ряд явлений, однако, как бы отвергает это положение; так, камень, обладавший некоторой потенциальной энергией, которая по мере падения его постепенно переходила в кинетическую энергию, вскоре после падения на землю останавливается и лишается этой энергии. Она, повидимому, исчезает.

При работе какого-либо двигателя, напр., паровой машины, мы можем обнаружить, что полезная работа или работа на валу всегда меньше работы пара в цилиндре за соответствующий промежуток времени.

Ближайшие исследования только что указанных и ряда других примеров показывают, что видимое исчезновение затраченной работы сопровождается другими изменениями в состоянии тел, в приведенных случаях повышением температуры их, указывающей на возникновение теплоты. С другой стороны мы знаем, что теплота может совершить работу. Так, напр., нагревая воздух в цилиндре с вставленным в него сверху поршнем, мы можем поднять последний. Кроме того, опытами показано, что *при затрате определенного количества работы получается соответствующее ему количество теплоты**).

Это приводит к выводу, что теплота есть *одна из форм энергии*. То же относится к энергии электрической, световой и т. д.

Эти соображения указывают, что закон сохранения энергии получает более широкое общее значение.

---

*) О соотношении между ними сказано ниже.

Энергия пара, поступающего в цилиндр, помимо доставления полезной работы, преодолевает сопротивления трения, нагревает цилиндр, причем она не теряется, а переходит из одной формы в другую. В электродвигателе большая часть электрической энергии, притекающей к нему, превращается в нем в работу; остальная затрачивается бесполезно на нагревание различных частей двигателя.

100. Соотношение между теплотой и работой. Работа или механическая энергия измеряется в метрической системе мер в кгр. метрах. Теплота, как известно из физики, измеряется в единицах теплоты или в калориях, причем большой калорией называют то количество теплоты, которое требуется для нагревания одного килограмма воды на один градус Цельсия или, обратно, то количество тепла, которое выделяется одним килограммом воды при охлаждении ее на 1° Ц. Малая калория в тысячу раз меньше большой. Исследования показали, что для получения одной большой калории необходимо затратить 427 кгр. м. работы. Эта величина работы эквивалентна или равноценна большой калории. Ее называют механическим эквивалентом одной единицы теплоты или, короче, механическим эквивалентом теплоты, причем, не упоминая о количестве теплоты, разумеют одну большую калорию. Обратно может быть найден тепловой эквивалент для какого-либо количества работы. Найдем тепловой эквивалент лошади-часа*). Лош. час равен 75 кгр. м./сек. $\times$ 3600 сек. $=$ $= 75 \times 3600$ кгр. м., что составляет $\frac{75 \times 3600}{427} = 632$ калории. Таким образом тепловой эквиваленг лош. часа равен 632 калории.

101. Коэффициент полезного действия машин. Различные машины и в частности двигатели расходуют затрачиваемую в них энергию более или менее совершенно, т. е. превращают в полезную работу большую или меньшую часть притекающей к ним энергии. Если мы возьмем какой-либо тепловой двигатель в виде, напр., паровой машины или двигателя внутреннего горения, работающий за счет теплоты топлива, то в них полным или промышленным коэффициентом полезного действия, характеризующим двигатель с точки зрения экономичности расхода им топлива, называют отношение доставленной двигателем работы к количеству работы или теплоты, выраженному в единицах работы, затраченному за тот же промежуток времени в двигателе. Вместо

---

*) Лошадь — единица мощности, а потому, будучи умножена на время, дает работу.

единиц работы указанные величины могут быть выражены в единицах теплоты.

Пусть средняя полезная мощность двигателя N лош., и двигатель работал в течении t час., израсходовав за это время Q кгр. топлива с теплотворной способностью W калорий; под последней разумеют то количество тепла, которое выделяется 1 кгр. топлива при совершенном сгорании его. Мы будем иметь: доставленная двигателем работа

$$Nt \text{ лош. час} = 632\ Nt \text{ калорий;}$$

расход теплоты QW калорий;

коэффициент полезного действия:

$$k = \frac{632\,Nt}{QW} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (67)$$

Примерные значения k в современных двигателях таковы: паровые машины — 0,07—0,18; двигатели внутреннего горения — 0,15—0,35; электродвигатели 0 60—0,90.

Примечание. Более подробное изложение вопросов, относящихся к двигателям, читатель найдет в сочинении автора: «Двигатели внутреннего горения». Здесь мы имеем целью оттенить тот вопрос, что тепловые двигатели являются примером машины, превращающей тепловую энергию в работу.

102. Вопросы и задачи.

1. Что называется механическим эквивалентом тепла?
2. Чему равняется лош. час?
3. Что называется коэффициентом полезного действия машин?
4. Нет ли разницы в определениях коэффициента полезного действия, данных в §§ 51 и 101?
5. Теплопроизводительная способность средних сортов угля равна 7.500 калориям. Найти соответствующую энергию в лош. часах, принимая, что при горении угля освобождается: а) вся энергия, б) 70% ее.
6. Считая, что испарение одного кгр. воды требует 650 больших калорий, найти какое количество кгр. воды испарится при сжигании одного кгр. угля, если воде передается 80% теплоты топлива.

ГЛАВА XVI.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

103. Краткий обзор содержания книги. Все предыдущее изложение посвящено основам теоретической механики: статики и динамики с приложениями их к простым машинам. Ряд наиболее характерных случаев приложения выводов теории указан в задачах, имеющих назначением развить в читателе умение пользоваться полученными сведениями. При решении задач ранее выбора тех или других формул или уравнений необходимо отдать себе ясный отчет, к какой области механики относится данная задача.

Если речь идет о нахождении силы, уравновешивающей данную систему сил или о равновесии сил, то такие вопросы решаются на основании общих уравнений равновесия, указанных в главе VII. В частных случаях условия эти получают более простые выражения, как это было показано при изучении простых машин.

Пользуясь приведенными выводами и примерами, читатель может применить их также к случаям, не рассмотренным в книге.

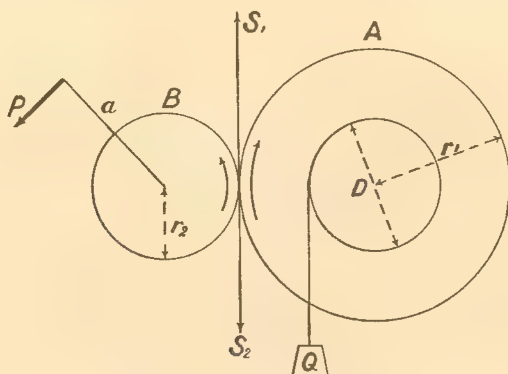
Во второй части книги приведен вывод различных уравнений, относящихся к случаям движения равномерного и равнопеременного, кругового, а затем указаны соотношения, относящиеся к работе и мощности. В каждом частном случае по внимательном рассмотрении данных и искомых величин того или другого вопроса останется применить необходимые уравнения, беря их в форме, отвечающей специальным условиям данного случая.

Приведем несколько вопросов и задач, решение которых производится на основании изложенных выводов статики и динамики.

104. Вопросы и задачи для повторения пройденного.

1. В фиг. 71 представлена схема лебедки, состоящей из барабана с перекинутым через него канатом, на котором подвешен груз Q, пары зубчатых колес с радиусами r_1 и r_2 и рукояти a, на которую действуют рабочие. Найдем соотношение между грузом и усилием рабочих при отсутствии вредных сопротивлений в машине (P_0) и при наличности их (P). Заметим, что точки

на окружностях зубчатых колес, сцепляющихся между собою, при вращении их без скольжения будут проходить в одно и то же время одинаковые пути. Толщина зубцов, а также шаг их, равный сумме зубца и впадины, делаются одинаковыми на



Фиг. 71. Схема лебедки.

обоих сцепляющихся колесах. Обозначая шаг через p, числа зубцов соответственно через z_1 и z_2, получим:

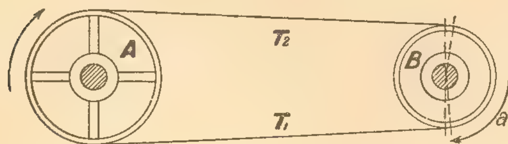
$$2\pi r_1 = pz_1 \text{ и } 2\pi r_2 = pz_2.$$

Откуда

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

где n_1 и n_2 числа оборотов колес. Найденное отношение называют передаточным числом; его берут больше единицы (т. е. деля r_1 на r_2, если r_1 больше r_2, а не наоборот). Потери работы примем 10% на валу лебедки и 10% в паре зубчатых колес.

Найти передаточное число лебедки (фиг. 71) при $r_2 = 90$ мм. и $r_1 = 315$ мм.



Фиг. 72. Ременная передача.

2. Найти P_0 и P при данных: $a = 400$ мм. $Q = 1000$ кгр., $D = 200$ мм. и $r_1 : r_2 = 5$.

3. Найти соотношение между числами оборотов n_1 и n и моментами вращения ременных шкивов A и B (фиг. 72) при радиусах их соответственно r_1 и r_2.

4. Воспользоваться у-нием (68) для нахождения n_2 при следующих данных: $r_1 = 120$ мм., $r_2 = 270$ мм., $n_1 = 900$ обор. в минуту.

5. Найти соотношение между мощностью N в лош. и моментом вращения M ременного шкива в зависимости от радиуса шкива r и от числа оборотов n в минут.

6. Указать число величин, входящих в уравнение (56).

а) Сколько из них должно быть дано, чтобы найти определенные значения для остальных?

б) Составить какую-либо задачу, где искомыми были бы F, v и s.

в) Могут ли быть даны независимо F, w и P?

7. Тело весом в 30 кгр., находящееся в покое, приводится в движение силой, имеющей последовательно следующие величины:

в течение 2 секунд .... $F_1 = 20$ кгр.
« « 3 « .... $F_2 = 50$ «
« « 5 « .... $F_3 = 90$ «

Найти:

а) ускорение за каждый из промежутков;
б) скорости тела в конце двух, пяти и десяти сек;
в) пройденные расстояния;
г) работу силы за каждый из промежутков;
д) общую работу силы;
е) среднее усилие;
ж) представить графически зависимость между пройденным расстоянием и определить работу графически.

8. Найти коеффициент полезного действия насоса, поднимающего 2.000 литр воды в мин. на 18 м., если он развивает 12 лош.

9. Найти расход керосина в двигателе мощностью 25 лош. в 8 час. при коеффициенте полезного действия его 0,16 и при теплотворной способности керосина 10.000 кал.

10. Чему равен коеффициент полезного действия бензинового двигателя, расходующего в час на лошадь 1 кгр. бензина при теплотворной способности его 10.500 кал.?

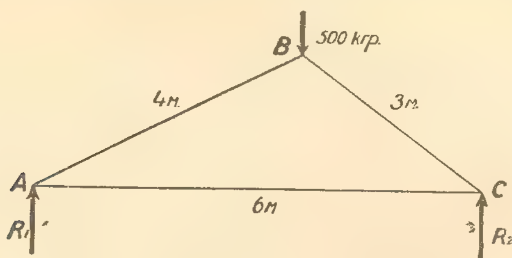
11. В руководстве Норрис и Смит: «Практическая арифметика»*), описаны простые машины. Предлагаем читателю проделать на основании сведений настоящего курса, применяя, где возможно, графический метод решения, и учитывая трение, следующие задачи: стр. 70, пример 2; стр. 76, пример; стр. 79, зад. 112, 113 и 114; стр. 129, § 91; стр. 134, зад. 148—153; стр. 139, пример; стр. 141, задачи 154—160; стр. 149, задачи 161—165; стр. 156, задачи 166—175; стр. 158—165.

12. Дана треугольная ферма, состоящая из двух ног AB и BC и затяжки AC (фиг. 73). Найти реакции R_1 и R_2 и напряжения в ногах и затяжке.

13. Тело весом 2 фн. привязано к веревке длиною 1 фут. и вращается, описывая вертикальный круг. Если скорость в

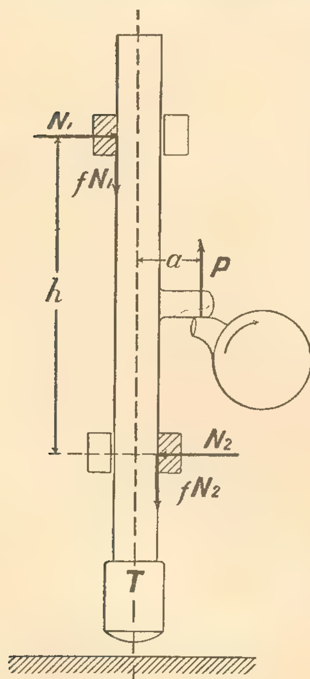
*) Перевод инж. С. И. Кошкина.

нижней точке B равна 15 фут. в сек., найти: а) скорость в верхней точке A; б) натяжение веревки в верхней точке; в) наименьшую скорость вверху, при которой тело не упадет вниз.



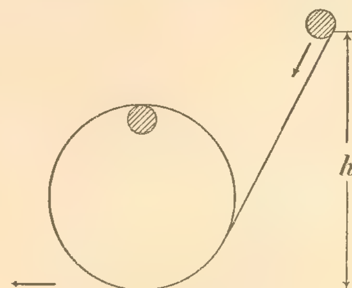
Фиг. 73. Ферма из двух ног и затяжки.

14. Стержень с чугунной бабой T (фиг. 74) весит $Q = 180$ кгр. и приводится в действие диском, который при вращении поднимает его пальцем, после чего баба падает под влиянием собственного веса. Плечо a усилия пальца относительно оси стержня равно 16 см., расстояние h между направляющими — 1,5 м. и коэффициент f трения между стержнем и направляющими — 0,15. Найти величину силы P, которая должна быть приложена на пальце для подъема бабы в средине хода ее, считая движение бабы равномерным.



Фиг. 74. К задаче 14.

15. Поезд весом 400 тонн движется по горизонтальному пути. Если коэффициент сопротивления равен 0,0045, найти силу тяги и мощность машины при скорости 90 км. в час.



Фиг. 75. Кольцевой путь.

16. Найти высоту h (фиг. 75), с которой должен скатиться шарик, чтобы описать петлю радиусом 6 фут., не упав вниз.

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

ВВЕДЕНИЕ И ГЛАВА I (§ 6).

1. Ответ на этот вопрос читатель найдет в § 1. В § 2 указано разделение теоретической механики на статику и динамику.

2. См. § 2.

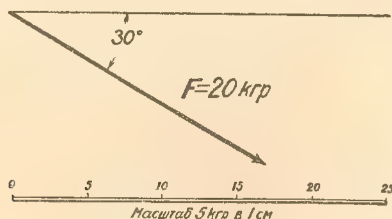
3. Сила — это та причина, которая стремится привести в движение тело или же изменить уже существующее движение тела. Сила проявляется при растяжении или сжатии, притяжении или отталкивании и т. п.

4. Тяжесть есть причина, благодаря которой все тела притягиваются к земле; вес тела есть сила, которой выражается действие силы тяжести на данное тело.

5. Единицами веса: кгр., пудами и т. п.

6. Сила определяется направлением ее, величиной и точкой приложения (§ 5).

7. См. фиг. 76.



Фиг. 76. К задаче 7.

ГЛАВА II (§ 11).

1. Ответ см. § 7.

2. См. § 7.

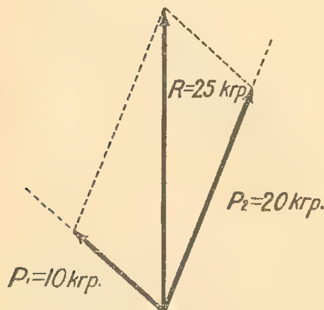
3. См. § 8.

4. Равнодействующая равна алгебраической сумме сил. Первые три силы будем считать положительными, последние две отрицательными. Согласно с этим $R = 10 + 5 + 25 - 8 - 14 = 18$ кгр.

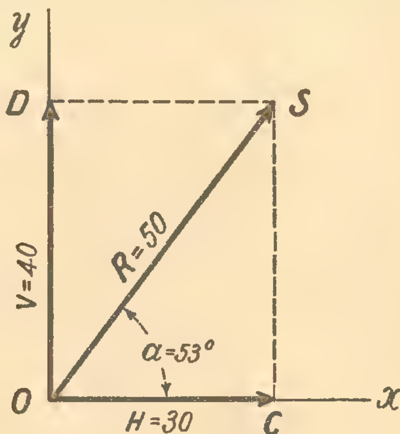
5. Равнодействующая данных сил в 10 и 20 кгр. должна быть вертикальной и направлена вверх; задача сводится к построению треугольника с вертикальной стороной $R = 25$ кгр. (фиг. 77).

6. См. § 9.

7. Откладываем в определенном масштабе (фиг. 78) силы $H = 30$ кгр. и $V = 40$ кгр. Строим на них прямоугольник $ODSC$ и находим диагональ его $OS = R$. Измерение ее в том же масштабе покажет, что она равна 50 кгр.



Фиг. 77. К задаче 5.



Фиг. 78. К задаче 7.

Вычислением найдем:

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50 \text{ кгр.}$$

Косинус угла ее с осью Ox равен $\frac{30}{50} = 0,6$, чему отвечает угол около 53^0.

Отношение синуса к косинусу дает тангенс (tg), т. е.

$$\sin\alpha : \cos\alpha = \frac{SC}{OS} : \frac{OC}{OS} = \frac{SC}{OC} = \operatorname{tg}\alpha,$$

т. е. тангенс угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Поэтому угол a может быть определен по тангенсу, а именно $\operatorname{tg}a = \frac{40}{30} = 1,333$. По таблицам тригонометрических величин найдем тот же угол около 53^0.

8. Если каждая из сил в отдельности не равна нулю, то и равнодействующая не равна нулю. В выражении: $R^2 = H^2 + V^2$ обе величины: H^2 и V^2 положительные и сумма их может быть нулем только тогда, когда в отдельности $H = O$ и $V = O$.

9. Приложить равнодействующую, имеющую составляющими силы: $H_1 = -30$ кгр., и $V_1 = -40$ кгр.; тогда $H + H_1 = 30 + (-30) = 0$ и $V + V_1 = 0$. Сила $R_1 = \sqrt{H_1^2 + V_1^2}$ направлена обратно R.

ГЛАВА III (§ 16).

1. См. § 12. Вопрос может быть решен чертежем или вычислением.

2. $R = \sqrt{800^2 + 1400^2} = 100\sqrt{8^2 + 14^2} = \sqrt{64 + 196} = 100\sqrt{260} = 100 \times 16,12 = 1612$ кгр. Cos искомого угла равен $1400 : 1612 = 0,869$; угол около 30^0.

3. Находим составляющие сил P_1, P_2 и P_3 по осям Ox и Oy:

$$\begin{aligned} P_1)\quad & X_1 = P_1 \cos 15^0 = P_1 \times 0{,}9659, \\ & Y_1 = P_1 \sin 15^0 = P_1 \times 0{,}2588, \\ P_2)\quad & X_2 = P_2 \cos 45^0 = P_2 \times 0{,}7071, \\ & Y_2 = P_2 \sin 45^0 = P_2 \times 0{,}7071, \\ P_3)\quad & X_3 = P_3 \cos 75^0 = P_3 \times 0{,}2588, \\ & Y_3 = P_3 \sin 75^0 = P_3 \times 0{,}9659. \end{aligned}$$

Составляющая X силы R по оси Ox равна $(P_1 = P_2 = P_3)$:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = P_1(0{,}9659 + 0{,}7071 + 0{,}2528) = \backsim 1{,}93\,P_1 = 193 \text{ кгр.}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 193 \text{ кгр.}$$

$$R = \sqrt{193^2 + 193^2} \cdot \sqrt{74498} = 273 \text{ кгр.}$$

Значения X и Y и направления сил P_1, P_2, P_3 показывают, что R направлена вверх и вправо от оси Ox, причем угол ее с осью Ox равен 45^0.

4. Строим многоугольник на данных силах (§ 14).

5. В указанных частных случаях $\cos\alpha$ получает значения, которые могут быть найдены в таблицах тригонометрических величин или вычислены из соотношения между сторонами треугольников. Имеем:

$$\cos 0^0 = 1;\ \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}866;\ \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707;\ \ \cos 60^0 = 0{,}5;$$

$$\cos 90^0 = 0;\ \cos 180^0 = -1.$$

Напр., при $a = O$, получаем:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 = (P_1 + P_2)^2,$$

$$R = P_1 + P_2,$$

что ясно из чертежа.

При угле между силами в 90^0 найдем $R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ и т. д.

6. Искомое усилие находим по формуле (5), где $P_1 = 400$, $P_2 = 600$, $a = 45^0$ и $\cos\alpha = 0{,}707$, а потому:

$$\begin{aligned} R^2 &= 400^2 + 600^2 + 2 \times 400 \times 600 \times 0{,}707 = \\ &= 100^2\,(4^2 + 6^2 + 2 \times 4 \times 6 \times 0{,}707) = \\ &= 100^2\,(16 + 36 + 33{,}9) = 100^2 \times 85{,}9. \end{aligned}$$

$$R = 100 \times 8{,}59 = 859 \text{ кгр.}$$

Направление найдем чертежем.

При $a = 90^0$ получим:

$$R = \sqrt{400^2 + 600^2} = 100\sqrt{4^2 + 6^2} = 100\sqrt{52} = 100 \times 7{,}21 = 721 \text{ кгр.}$$

7. Давление, производимое паром на поршень, выраженное на чертеже отрезком OA, передается его штоку, а этим последним через ползун шатуну OC. Так как шатун составляет угол со штоком, направленным по OO^1, то сила OA в точке O должна быть разложена на OB и ON; последняя выражает давление ползуна на параллели. Из прямоугольного треугольника OBA находим:

$$OB = \frac{OA}{\cos 12^0} = \frac{6000}{0{,}978} = 6140 \text{ кгр.}$$

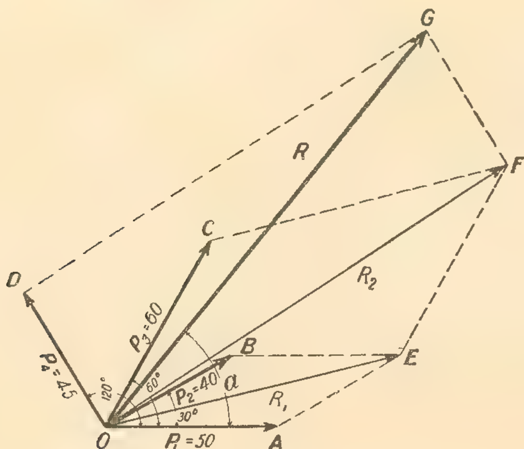
8. Сила ON равна OA $\operatorname{tg} 12^0 = 6000 \times 0{,}2126 = 1275$ кгр.

9. За точку приложения силы, действующей на тело, может быть взята любая точка на линии направления силы. Переносим усилие OB в шатуне из точки O в точку C. Пусть его значение представится отрезком CF, по величине равным OB, а по направлению, совпадающим с ним. Как было объяснено выше (§ 8), каждая сила может быть разложена на составляющие силы по любым направлениям.

Пользуясь этим, разлагаем силу CF на две составляющих: одну CS под прямым углом к линии кривошипа и другую CK по продолжению этой линии. Чертим параллелограмм $CKFS$. Отрезок CS представит силу, вращающую кривошип. По построению угол FCS равен 12^0, т. к. CF параллельно OB, а CS параллельно OO^1, а потому:

$$CS = OB = 6000 \text{ кгр.}$$

10. Делаем чертеж всех действующих сил, изображая их величины прямолинейными отрезками в одном и том же масштабе, а направление



Фиг. 79. К задаче 10.

откладыванием данных углов (фиг. 79). Проводим горизонтальную линию и откладываем $OA = P_1 = 50$ кгр.; $OB = P_2 = 40$ кгр. под углом 30^0 с горизонталью; $OC = P_3 = 60$ кгр. под углом 60^0 с горизонталью и, наконец, линию $OD = P_4 = 45$ кгр. под углом в 120^0 с горизонталью. На силах P_1, P_2, P_3 и P_4 строим ломаную линию $OAEFG$, замыкающая которую дает равнодействующую $OG - R$, равную 143,5 кгр.

Равнодействующая эта может быть найдена также разложением всех сил на их горизонтальные и вертикальные составляющие. Так, сумма горизонтальных составляющих равна:

$$H = 50 + 40\cos 30^0 + 60 \times \cos 60^0 + 45\cos 120^0 =$$
$$= 50 + 40 \times 0{,}866 + 60 \times 0{,}5 - 45 \times 0{,}5 = 92{,}14.$$

Сумма вертикальных составляющих:

$$V = 0 + 40\sin 30^0 + 60 \times \sin 60^0 + 45 \times \sin 120^0 =$$
$$= 0 + 40 \times 0{,}5 + 60 \times 0{,}866 + 45 \times 0{,}866 = 110{,}9.$$
$$R^2 = 92{,}14^2 + 110{,}9^2 = 20795,$$
$$R = 144{,}2 \text{ кгр.}$$

или, округляя, 142 кгр.

Величина эта несколько меньше найденной выше графическим путем, но настолько, что результат построения достаточно точен. Направление R находим из выражения:

$$\text{tg}a = \frac{V}{H} = \frac{110{,}9}{91{,}14} = 1{,}204,$$
$$a = 50^0 20'.$$

ГЛАВА III (§ 23).

1. Ответ см. § 17.

2. а) Не зависит (§ 17). В этом заключается одно из основных начал механики, высказанных Ньютоном.

б) Не может, согласно с а.

3. Уравновешиваются (§ 17).

4. Мое усилие приложено к столу, а реакция стола к кисти руки. Таким образом обе силы приложены к разным телам и не могут быть сложены, как приложенные к одному телу. Но возникает вопрос, под действием каких сил рука находится в покое? Силы эти: усилие, передаваемое ей плечом и реакция стола, которые равны по величине и обратно направлены, а потому они уравновешиваются и оставляют руку в покое.

5. См. § 18.

6. См. § 19.

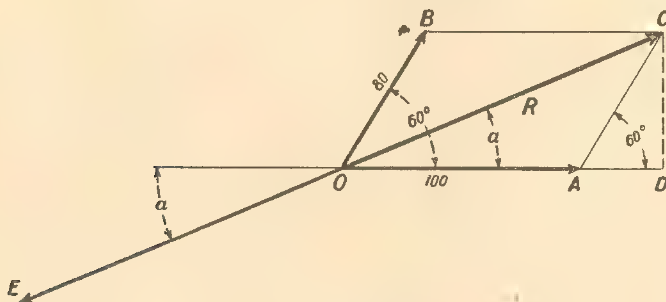
7. Действие связей заменяют соответственно подобранными силами (§ 19).

8. См. § 21.

ГЛАВА III (§ 28).

1. См. § 25.

2. Пусть OA (фиг. 80) сила в 100 кгр. и OB сила в 80 кгр. Строим



Фиг. 80. К задаче 2.

пареллелограмм $OBCA$, проводим диагональ OC, дающую равнодействующую силу R. Из у-ния (5):

$$R^2 = 100^2 + 80^2 + 2 \times 100 \times 80 \times \cos 60^0 = 10000 + 6400 + 8000 = 24400.$$

$$R = 156{,}2 \text{ кгр.}$$

Если проведем CD перпендикулярно к OA, то $CD = AC \times \sin 60 = 69{,}3$ и $AD = AC \cos 60^0 = 40$, откуда

$$\operatorname{tg} a = \frac{CD}{OD} = \frac{69{,}3}{100+40} = 0{,}495$$

и $$a = 26^0 20'.$$

Сила, уравновешивающая систему сил, равна и противоположна равнодействующей этих сил. Следовательно, отрезок OE, равный OC и противоположно направленный, выразит искомую силу. Эта сила с горизонталью образует угол в $26^0 20' + 180^0 = 206^0 20'$, если углы отсчитывать от линии OA обратно часовой стрелке.

3. В фиг. 22 (текст) угол $NAH = 35^0$ Линия $AN = T = 50$ пуд. Отрезок NH представляет искомую нагрузку P. Имеем:

$$\frac{NH}{NA} = \sin 35^0 = 0{,}574.$$

Отсюда

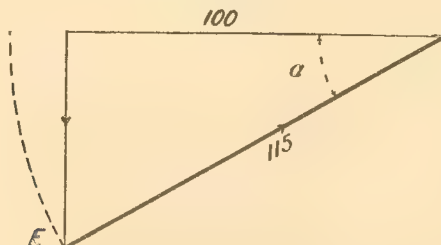
$$NH = NA \times \sin 35^0 = 50 \times 0{,}574 = 27{,}7 \text{ пуд.}$$

4. Напряжение в подвесе OB есть равнодействующая веса P шара и центробежной силы F. В треугольнике LOH (фиг. 19) сила $T = OL$ равна и противоположна равнодействующей веса P и центробежной силы OA. Так как

$$HL = OE = P = 40 \text{ и } OH = F = 30,$$

то

$$T^2 = OL^2 = F^2 + P^2 = 30^2 + 40^2 = 2500 \text{ фн. и } T = 50 \text{ фн.}$$



Фиг. 81. К задаче 81.

5. Отрезок $NH = AD$ будет вдвое меньше. Проведя линию параллельную NH из средины AD, мы построим параллелограмм со сторонами вдвое меньше AD и AN и получим для T значение меньше в два раза.

6. Проведем горизонтальный отрезок (фиг. 81), равный в определенном масштабе $200 : 2 = 100$ фут. Восставив в конце его перпендикуляр, засечем его радиусом $230 : 2 = 115$ фут. в точке E.

Искомый угол a найдем по косинусу его, причем $\cos a = \frac{100}{115} = 0{,}87$ $a = 29^0 32'$; груз равен $=5$ тоннам, а напряжение каната $(10 : 2) : \sin a = 5 : 0{,}49 = 10{,}1$ тонн.

7. В фиг. 82 отрезок CA представляет всю вертикальную нагрузку $Q + P = 40$ пуд. Отрезок BC изображает силу T, растягивающую канат; AB, параллельная подкосу AB, представляет собою силу R, сжимающую его. Угол $CAB = 40^0$, угол $ACB = 60^0$ и угол $CBA = 180 - 60 - 40 = 80^0$.

Пользуясь выражением (7б), можно написать:

$$\frac{T}{\sin 40^0} = \frac{P + Q}{\sin 80^0},$$

откуда

$$T = \frac{(P + Q) \times \sin 40^0}{\sin 80^0} = \frac{40 \times 0{,}643}{0{,}985} = 26{,}12 = \backsim 26 \text{ пуд.},$$

где знак $\backsim$ обозначает приблизительное равенство.

8. Применяя выражение (7б) для сторон треугольника CA и BC (фиг. 87), получим:

$$\frac{R}{\sin 60^0} = \frac{P + Q}{\sin 80^0},$$

откуда

$$R = \frac{(P + Q) \times \sin 60^0}{\sin 80^0} = \frac{40 \times 0{,}866}{0{,}985} = 35{,}2 \text{ пуд.} = \backsim 35 \text{ пуд.}$$

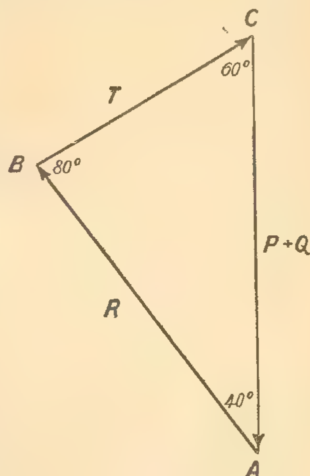
9. Сила, равная T, но обратная по направлению, выражает реакцию в точке C, причем для прочности крана канат должен быть в состоянии выдержать ее. То же относится к точке A, где реакция равна $-R$.

10. Проводим силы P_1, P_2, P_3 и P_4, данные условиями задачи (фиг. 79) в решениях задач. Проводим силу $GO - R$, равную равнодействующей силе, которая была найдена равной 144 кгр., но направленную обратно ей, т. е. от G к O. Начиная с точки O, строим многоугольник сил для чего проводим последовательно отрезки:

OA, равный и параллельный P_1,

$$AE = OB = P_2,$$
$$EF = OC = P_3,$$
$$FG = OD = P_4,$$
$$GO = R.$$

В этом многоугольнике силы взяты в круговом порядке; силы взаимно уравновешиваются, а потому последний отрезок GO должен быть равен и параллелен силе R. Если этого не будет, то это значит, что в построении, где нибудь была сделана ошибка.



Фиг. 82. К задаче 7.

ГЛАВА IV (§ 34).

1. Пять. При наличности двух уравнений необходимо иметь три величины из пяти; не могут быть даны независимо друг от друга силы P, Q и R, так как они связаны одним уравнением, в которое только они и входят. Это ясно и по существу дела; действительно, нельзя дать любое значение для равнодействующей двух заданных параллельных сил.

2. Не переместится, что не трудно обнаружить построением.

3. Применяя у-ния (12 и 13) для параллельных сил, направленных в разные стороны, получаем:

$$R = P - Q,\ 10 = 40 - Q,\ Q = 30 \text{ кгр.},$$

$$Pp = Qq = 40 \times 24 - 30 \times q;\ q = 32 \text{ см.}$$

4. Вес искомого груза R равен и противоположен равнодействующей приложенных усилий, т. е. $R - P + Q = 60 + 40 = 100$ фун. Расстояние точки приложения найдется из у-ния: $Pp = Qq$ и $p + q = l$, где l — длина шеста.

Решая их, находим:

$$60p = 40q;\ q = \frac{60}{40}p = \frac{3}{2}p;$$

$$p = l - q = 10 - \frac{3}{2}p;$$

$$p + \frac{3}{2}p = 10;\ p = 4 \text{ фут.},$$

т. е. груз находится на расстоянии 4 фут. от человека, прилагающего большее усилие — 60 фун. и на 6 фут. от человека, прилагающего меньшее усилие — 40 фун.

5. Момент пары M равен произведению силы на плечо (§ 32), а потому: $M = -40 \times 50 = -2000$ кгр. см.; знак минус берем потому, что вращение братно часовой стрелке.

6. Усилие, прилагаемое человеком к рукояти ворота, является одной из сил, составляющих пару; расстояние от рукоятки до оси вала плечом пары. Вторую силу пары образует реакция опоры, без которой человек не мог бы осуществить давления на рукоять ворота.

7. Вращающий момент (у-ние 14) равен $30 \times 15 = 450$ кгр. см. или $\frac{450}{100} = 4{,}5$ кгр. м.

8. Вращающий момент равен (у-ние 14) $24 \times 40 = 960$ фн. дм. = 2 пудофут.

ГЛАВА V (§ 38).

1. В треугольнике ADE (фиг. 83) соединяем A со срединой F стороны DE. Вообразим треугольник разбитым на ряд узеньких полосок, параллельно основанию DE. Одна из таких полосок BC показана на чертеже. Центр тяжести ее лежит в середине ее S. То же будет и для всякой другой из таких полосок. Все центры тяжести их лежат на линии AF, равноделящей сторону DE. Следовательно, центр тяжести треугольника лежит на той же прямой. Снова делим треугольник на серию таких же полосок, параллельных какой-либо из других сторон, напр., AE, причем можем сделать заключение, что центр тяжести треугольника будет находиться на линии DH, равноделящей сторону AE. Но если центр тяжести должен одновременно находиться на двух пересекающихся линиях, то он лежит в точке пересечения их G.

В геометрии доказывается, что точка пересечения равноделящих стóроны лежит от каждой стороны на одной трети соответствующей высоты.

Фиг. 83. К задаче 1.

Фиг. 84. К задаче 2.

ты. Следовательно, на том же расстоянии от каждой из сторон треугольника будет находиться и центр тяжести. Пользуясь теоремой моментов, можно доказать, что плечо центра тяжести треугольника относительно стороны равно одной трети высоты, опущенной на ту же сторону. Для доказательства применим искусственный прием. Допустим, что три силы, из которых каждая равна весу Q треугольника, приложены к его трем вершинам A, D и E. Простым сложением этих параллельных сил, направленных в одну сторону, легко убедиться, что равнодействующая их лежит в точке пересечения равноделящих, т. е. в центре тяжести.

2. Не всегда. Для примера возьмем предмет, представленный в фиг. 84 (скоба шатуна паровой машины). Центр тяжести ее лежит в точке G, вне тела скобы. См. также фиг. 38.

3. Если бы лист был сплошным, то центр тяжести его лежал бы в точке O пересечения диагоналей; центр отверстия находится на диагонали CG; следовательно, центр тяжести листа с вырезом лежит на ней. Обозначим расстояние центра тяжести всего листа от точки O через x. Площадь отверстия равна $\frac{1}{4}\pi \times 4^2 = 3{,}1416 \times 4 = 12{,}57$. Площадь листа с вырезом равна разности площади полного квадрата $15 \times 15 = 225$ кв. дм. и площади отверстия 12,57, т. е. $225 - 12{,}57 = 212{,}43$ кв. дм.

Момент целого листа равен сумме моментов (§ 37) весов или пропорциональных им площадей листа с вырезом и выреза относительно любой точки плоскости листа. Возьмем эти моменты относительно точки O, для которой момент целого листа равен нулю, так как здесь лежит центр тяжести его. Получим: $212{,}43x = 12{,}57 \times 2$, где 2 расстояние C от O. Из последнего выражения $x = 0{,}118$ дм. = около $\frac{1}{8}$ дм.

4. Вместо весов берем пропорциональные им объемы. Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 3^3 = 113$ кб. см. Объем прута: $\frac{\pi d^2}{4} l = \frac{22 \times 2^2 \times 18}{7 \times 4} = \backsim 57$ кб. см. Центр тяжести прута находится на расстоянии 9 см. от его свободного конца, центр тяжести шара от того же конца на расстоянии, равном длине прута плюс половина диаметра шара, т. е. $18 + 6/2 = 21$ см. Возьмем моменты относительно свободного конца прута, обозначив расстояние искомого центра тяжести от него через x. Получим: $57 \times 9 + 113 \times 21 = (57 + 113)\,x$, откуда $x = \frac{513 + 2373}{170} = \backsim 17$ см.

ГЛАВА V (§ 41).

1. Разделим угольник (фиг. 38) на два прямоугольника: левый P_1 с основанием OC и $CDEF = P_2$. Центр тяжести первого будет в точке M пересечения диагоналей, центр тяжести второго в точке N. Проводим оси Ox и Oy и допустим, что центр тяжести угольника находится в точке G, удаленной от осей Ox и Oy соответственно на x и на y. Площадь $P_1 = \frac{3}{4} \times 4 = 3$ кв. дм.; площадь $P_2 = \frac{3}{4} \times 5\frac{1}{4} = 3{,}94$ кв. дм. Площадь угольника $P = 3 + 3{,}94 = 6{,}94$ кв. дм.

Точка M находится на расстоянии $y_1 = 2$ дм. от оси Ox и $x_1 = \frac{3}{8}$ дм. от оси Oy. Точка же N находится на $y_2 = \frac{3}{8}$ дм. от оси Ox и $x_2 = 3\frac{3}{8}$ дм. от оси Oy. Величины площадей могут быть вставлены в уравнения моментов вместо весов, так как площади пропорциональны весам; получим:

$$Px = p_1x_1 + p_2x_2,$$
$$Py = p_1y_1 + p_2y_2.$$

Подставляя цифровые значения, находим:

$$x = \frac{3 \times \frac{3}{8} + 3{,}94 \times 3\frac{3}{8}}{6{,}94} = 2{,}08 \text{ дм.},$$

$$y = \frac{3 \times 2 + 3{,}94 \times \frac{3}{8}}{6{,}94} = 1{,}08 \text{ дм.}$$

2. Балка находится в неустойчивом равновесии (стр. 42).

3. Шар на горизонтальной плоскости. Бочка, лежащая на боку, находится в безразличном равновесии относительно своей продольной оси.

4. Центр тяжести должен быть возможно ниже. Нетрудно убедится из чертежа, что при этом можно допустить больший наклон ее.

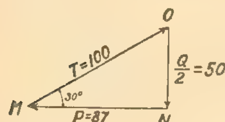
5. В безразличном равновесии относительно своей продольной оси и устойчивом относительно горизонтальной оси, перпендикулярной к первой.

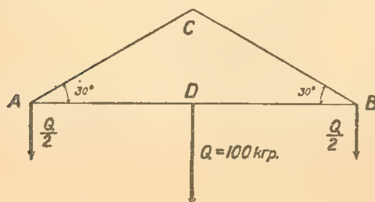
ГЛАВА VI (§ 45).

1. Давление на площадь днища, приходящееся на связь, равно 15 × 22 × 8 — 2640 кгр. Эта сила перпендикулярна к площади днища. Стороны треугольника *ABC* (фиг. 41) внизу изображают три силы, действующие на точку, где связь прикреплена к днищу, причем *AB* = = 2640 кгр.; *BC* — искомая сила, а *AC* сила, стремящаяся срезать заклепки. Имеем:

$$BC = \frac{BA}{\cos 25^0} = \frac{2640}{0{,}906} = 2914 \text{ кгр.}$$

2. По условию задачи груз *Q* помещен в точке *D*, т. е. посредине между *A* и *B* (фиг. 85). Силы, действующие в точках *A* и *B*, равны *Q*/2. Рассмотрим узел *A* как свободное тело, для чего заменяем действие частей *AC* и *AB* силами, направленными вдоль них; мы знаем их направления, но не знаем их величин. Для отыскания последних строим треугольник *MON*; в нем $ON = {}^1/_2Q$, а стороны *MO* и *NM*, параллельные соответственно *AC* и *AB*, дадут усилия в них.





Фиг. 85. К задаче 2.

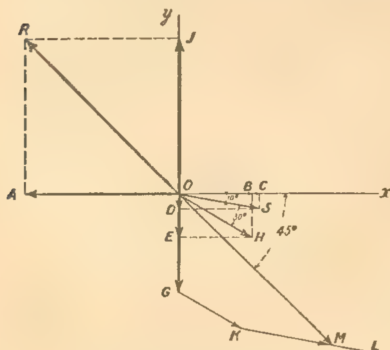
При угле в 30⁰ имеем:

$$T = \frac{{}^1/_2Q}{\sin 30^0} = \frac{50}{0{,}5} = 100 \text{ кгр.}$$

Подобным же образом

$$P = 100 \times \cos 30^0 = 100 \times 0{,}867 = \backsim 87 \text{ кгр.}$$

3. Здесь мы имеем дело с 4 силами, действующими на точку *A* (фиг. 42), а именно: 1) вес = 4.000 кгр., 2) действующее вниз усилие подъемного каната *AC* = 3.500 кгр., 3) неизвестное натяжение тяги *AB* и 4) неизвестное усилие в стрелке *AD* В фиг. 86 имеем: *OG* = 4.000 кгр., *OH* = 3.500 кгр., *OR* изображает направление усилия в укосине, а *OS* направление сопротивления каната. Под действием этих четырех сил точка *A* остается в покое и, следовательно, силы взаимно уравновешиваются. Но тогда на них можно построить многоугольник (§ 25). Для этого имеем *OG* = 4.000 кгр., из точки *G* проводим отрезок *GK* параллельно *OH*, равный 3.500 кгр. (в том же масштабе как и *OG*). Из точки *K* проводим линию *KL* параллельно силе *OS*; длина этой стороны многоугольника пока не известна. Продолжаем линию *RO* до ее пересечения с линией *KL* в точке *M*. Линия *MO*, замыкающая многоугольник *OGKM*, даст направление усилия (сжатие) в стрелке. Измеряя отрезок *KM*, найдем его равным 3.350 кгр. и *MO* = = 8.950 кгр.



Фиг. 86. К задаче 3.

Эта задача может быть также решена путем вычислений (аналитически) разложением всех сил на их вертикальные и горизонтальные составляющие, как это показано в фиг. 86,

где, напр., OC есть горизонтальная, а OD вертикальная составляющие силы OS. Приложим условия равновесия, найденные в гл. VI, взяв суммы составляющих по осям; суммы эти должны равняться нулю.

$$\sum X = OS \times \cos 10^0 + OH \cos 30^0 - OR \times \cos 45^0 =$$
$$= 0{,}985 \times OS + 0{,}866 \times 3500 - 0{,}707 \times OR = 0,$$
$$0{,}707 \times OR = 0{,}985 \times OS + 3031.$$

Точно так же:

$$\sum Y = OR \times \sin 45^0 - OS \times \sin 10^0 - OH \sin 30^0 - OG =$$
$$= 0{,}707 \times OR - 0{,}174 \times OS - 0{,}5 \times 3500 - 4000 = 0,$$
$$0{,}707 \times OR = 0{,}174 \times OS + 5750.$$

Отсюда:

$$0{,}985 \times OS + 3031 = 0{,}174 \times OS + 5750,$$
$$0{,}811 \times OS = 2719.$$
$$OS = 3353 \text{ кгр.}$$

Подставляя значения OS в одно из уравнений, указанных выше, найдем OR:

$$0{,}707 \times OR = 0{,}174 \times 3353 + 5750 = 6334,$$
$$OR = 8957 \text{ кгр.}$$

4. Сумма моментов относительно точки B равна: $- Y_1 \times a = - 32$. Силы не уравновешиваются. Во втором случае находим: $- Y_1 (a + 2) + Y_2 \times \times 2 = - 8 \times 6 + 8 \times 2 = - 32$, т. е. ту же величину (см. § 32).

5. Уравновесить можно парой силой, имеющей момент: $+32$.

ГЛАВА VII (§ 49).

1. Сила трения равна $200 \times 0{,}28 = 56$ кгр. Эта сила необходима для того, чтобы удерживать тело в состоянии равномерного движения.

2. Сила трения $F = fN$ (§ 48). Так как f меньше единицы, то чтобы поднимать тело, т. е. преодолевать его вес, нужна бóльшая сила, чем двигать тело, т. е. преодолевать силу трения.

3. Коэффициент трения f равен тангенсу угла a (§ 48), который в этой задаче равен 15^0; поэтому

$$f = \operatorname{tg} 15^0 = 0{,}268.$$

4. Коэффициент трения (§ 48)

$$f = \frac{F}{N} = \frac{100}{30000} = 0{,}0033.$$

5. Тангенс угла плоскости равен коэффициенту трения, т. е.

$$f = \operatorname{tg} a = 0{,}3;$$

из таблицы тангенсов угол $a = 16^0 40'$.

6. а) Берем из таблицы коэффициент трения $= 0{,}025$, а потому искомое усилие $= 1000 \times 0{,}025 = 25$ кгр.

б) Для преодоления сопротивления песка усилие равно $1000 \times 0{,}200 = = 200$ кгр.

в) Если колеса заторможены, то коэффициент трения при перекатывании необходимо переменить на коэффициент трения при скольжении. Последний равен 0,50, а потому искомое усилие $= 1000 \times 0{,}5 = 500$ кгр.

Эти результаты ясно показывают, как колеблется сила трения в зависимости от различных обстоятельств.

ГЛАВА VIII (§ 56).

1. В этом случае расстояние p (фиг. 45) равно 3 дм., расстояние $q = 48$ дм., а усилие $P = 75$ фн., следовательно:

$$Q = P \times \frac{p}{q} = \frac{75 \times 48}{3} = 1200 \text{ фн.}$$

2. Колесная тачка есть рычаг второго рода (фиг. 46). Здесь расстояние q равно 12 дм., растсояние $p = 40 + 12 = 52$ дм. Поэтому

$$Q = P\frac{p}{q} = \frac{60 \times 52}{12} = 260 \text{ фн.}$$

3. Давление колеса на землю численно равно реакции опоры (фиг. 46), т. е. $R = Q - P = 260 - 60 = 200$ фн.

4. Полное давление пара на клапан равно $0.7854 \times 4^2 \times 80 = 1005$ фн. Из у-ния: $Q_1a + Q_2b + Q_3c = Pc$, находим расстояние a:

$$a = \frac{Pc - Q_1b - Q_3c}{Q_1} = \frac{1005 \times 4{,}5 - 25 \times 15 - 10 \times 4{,}5}{100} = 41 \text{ дм.}$$

Таким образом, чтобы уравновесить давление пара в 80 фн. на кв. дм., груз весом 100 фн. должен быть помещен на расстоянии 41 дм. от опоры A.

5. а) Для решения этой задачи применим у-ние (32), беря P_0 вместо P:

$$Q = \frac{P_0R}{r} = \frac{40 \times 45}{8} = 225 \text{ кгр.}$$

б) При наличности трения и $k = 0{,}95$ груз $= 225 \times 0{,}95 = 213{,}75$ кгр.

ГЛАВА VIII (§ 61).

1. Груз $Q = 2P_0$ (§ 57) при отсутствии трения, а потому $Q = 80$ кгр. При наличии трения имеем: для подвижного блока A: $P_2 = P_0\frac{1}{k_2}$, а для неподвижного блока: $P_1 = P_2\frac{1}{k_1} = P_0 \times \frac{1}{k_1k_2} = 40\frac{1}{0{,}95 \times 0{,}96} = 43{,}9 = \backsim 44$ кгр.: следовательно $Q = 80 \times (40 \times 44) = 72{,}7$ кгр.

2. Груз висит на восьми канатах, а потому $Q = 8P_0 = 800$ кгр. При наличии трения (у-ние 35):

$$Q = P \times 2n \times k_1{}^m \times k_2{}^n = 100 \times 8 \times 0{,}95^4 \times 0{,}96^4 =$$
$$= 800 \times 0{,}9025^2 \times 0{,}9216^2 =$$
$$= 800 \times 0{,}69 = 552.$$

Коэффициент полезного действия рассматриваемого полиспаста $k = 552 : 800 = 0{,}69$.

3. При рассмотрении переходов каната с одного блока на другой можно установить (фиг. 54), что в полиспасте должно быть пять неподвижных шкивов, которые на рисунке для ясности сделаны различных диаметров. Канат, присоединенный в точке A, поднимается и спускается к неподвижному блоку 9 раз, пока от последнего неподвижного шкива D не уйдет к месту приложения усилия. Груз висит, таким образом, на 9 канатах, а потому при отсутствии трения равен $9 \times 100 = 900$ кгр. Не трудно найти величину его при наличии трения, применяя рассуждения предыдущей задачи.

4. В задаче 2 реакция R равна сумме веса Q и усилия, в отсутствии трения $R = 800 + 100 = 900$ кгр.

5. Из у-ния (35a)

$$Q = \frac{2P_0R}{R - r} = \frac{2 \times 100 \times 16}{16 - 14} = 1600 \text{ кгр.}$$

ГЛАВА IX (§ 66).

1. Из у-ния (§ 62):

$$P_0 = 1600 \times \frac{1}{\sqrt{12+1}} = 133{,}2 \text{ кгр}$$

2. Из у-ния (38) $P_0 = Q\text{tg}a$. При подъеме 1 см. на 12 см. тангенс угла равен $^1/_{12}$; P равно 133,3 кгр.

3. Сила трения F равна:

$$f \times Q \times \cos a = 0{,}18 \times 1600 \times 0{,}9965 = 0{,}18 \times 1594 = 287 \text{ кгр.}$$

Составляющая силы тяжести, стремящаяся двигать тело вниз, равна

$$G = Q \times \sin a = 1600 \times 0{,}0833 = 133{,}3 = \backsim 133.$$

Сила, необходимая для удержания тела на плоскости равна (у-ние 40):

$$P = G - F = Q \times \sin a - fQ \times \cos a = 133 - 284 = -154 \text{ кгр.}$$

Значение P получилось отрицательным. Это показывает, что при данных условиях составляющая сила по плоскости от веса самого тела меньше силы трения, возбуждаемой составляющей веса; следовательно, тело удерживается на плоскости само.

4. В этом случае к телу должна быть приложена сила, равная сумме сил трения и составляющей силы тяжести (у-ние 39). В предыдущей задаче значения этих сил были найдены равными соответственно 133 и 287 кгр., следовательно, искомая сила

$$P = 287 + 133 = 420 \text{ кгр.}$$

Из сравнения этого результата с предыдущим решением можно сделать заключение: для всякого значения P между 154 кгр. и 420 кгр. тело на наклонной плоскости будет находиться в состоянии покоя.



Фиг. 87. К задаче 1 (§69).

Сила P направлена вниз, когда сила трения больше составляющей силы тяжести, направленной по плоскости (задача 3). Это будет тогда, когда тангенс угла наклона плоскости будет меньше коэффициента трения.

ГЛАВА X (§ 69).

1. Резьба имеет четыре витка на дюйме; поэтому ход винта равен 0,25 дюйма. Пусть фиг. 87 представляет собою развернутую нитку. Основанием наклонной плоскости является длина окружности винта, высотой ход винта; гипотенуза AC равна длине нитки. Движение подъемного винта домкрата равнозначно движению по наклонной плоскости AC. По построению

$$\text{tg}a = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}25}{6{,}28} = \frac{1}{25{,}12} = \backsim 0{,}04.$$

Из таблиц тангенсов найдется угол a 2°20′. Коэффициент полезного действия наклонной плоскости равен

$$k = \frac{1 - f\text{tg}a}{1 + f\text{ctg}a},$$

куда надо подставить $f = 0{,}14$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}04$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 25$;

$$k = \frac{1 - 0{,}14 \times 0{,}004}{1 + 0{,}14 \times 25} = \frac{0{,}9944}{1 + 3{,}5} = 0{,}22 \text{ или } 22\%.$$

2. Из фиг. 87 имеем: $P_0 = Q\operatorname{tg}\alpha$, а из соотношения диаметра d винта и рукояти l усилие рабочего K равно (§ 52):

$$P_0 \frac{r}{l} = Q \frac{r}{l} \times \operatorname{tg}\alpha - K,$$

где $r = d : 2$. Отсюда

$$Q = K \frac{l}{r} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 40 \frac{24}{1} \times \frac{1}{0{,}04} = 24000 \text{ фн.} = 600 \text{ пуд.}$$

В виду затрат на трение при $k = 22\%$ (задача 1) рабочий при том же усилии поднимет груз, равный всего лишь $600 \times 0{,}22 = 132$ пуд.

ГЛАВА X (§ 75).

1. Дано $w = 20$ м./сек.^{2}, а потому $s = \frac{wt^2}{2} = 10t^2$ и $v = wt = 20t$, т. е. $s = 10t^2$ и $v = 20t$.

2. Скорость сторожа $v = 3{,}3$ км. в час $= \frac{3{,}3 \times 1000}{60} = 55$м. в мин., искомое время (у-ние 46): $t = s : v = 100 : 55 = 1{,}82 = \backsim 1{,}8$ мин.

3. Пользуясь у-нием (50а), имеем пройденные расстояния: в течение первой секунды $h_1 = 4{,}9 \times 1^2 = 4{,}9$ м., в две секунды $h_2 = 4{,}9 \times 2^2 = 19{,}6$ м., в три секунды $h_2 = 4{,}9 \times 3^2 = 44{,}1$ м.

а) Соответственные расстояния от основания трубы $78{,}4 - 4{,}9 = 73{,}5$; $59{,}2$; $34{,}3$ и 0 м.

б) Расстояния, пройденные в каждую из 4-х секунд: $h_1 = 4{,}9$ м.; $h_2 - h_1 = 19{,}6 - 4{,}9 = 14{,}7$ м.; $h_3 - h_2 = 44{,}1 - 19{,}6 = 24{,}5$ и $h_4 - h_3 = 78{,}4 - 44{,}1 = 34{,}3$ м.

4. В у-ниях (49)

$$s = 300 \text{ м.}, \; v = 36 \text{ км./час} =$$

$$= \frac{36 \times 1000}{60 \times 60} = 10 \text{ м./сек.},$$

а потому

$$250 = \frac{wt^2}{2} \text{ и } 10 = wt,$$

откуда

$$t = \frac{10}{w}; \; 250 = \frac{w \times 10 \times 10}{2 \times w^2},$$

$$w = 0{,}2 \text{ м./сек.}^2.$$

5. Ускорение, равное 2 м. в сек. в сек., означает, что в каждую секунду скорость движения увеличивается на 2 м./сек. Следовательно, увеличение скорости в минуту будет равно произведению увеличения скорости для каждой секунды на 60 — число секунд в минуте, т. е. $60 \times 2 = 120$ м. в минуту в секунду. Это означает, что по истечении минуты тело, находившееся в покое, будет двигаться со скоростью 120 м. в сек. Соответственно с этим увеличение скорости или ускорение в м. в часах в сек. будет равно $120 \times 60 = 7200$. В километре 1000 метр.; поэтому ускорение 2 м. в сек. в сек. равнозначно ускорению

$$\frac{7200}{1000} = 7{,}2 \text{ км. в час в сек.}$$

ГЛАВА X (§ 79).

1. У-ния (56) и (57) показывают, что движение это может быть рассматриваемо состоящим из двух движений по одному и тому же пути: а) равномерного со скоростью v_0 и б) равнопеременного с ускорением w (у-ния 56) или g (у-ния 57).

2. В у-нии (56б) имеем $v = 10$ м./сек., $v_0 = 20$ м./сек., $t = 30$ сек., а потому $10 = 20 + 30\, w$, откуда:

$$w = \frac{10 - 20}{20} = -\frac{10}{20} = -0{,}5 \text{ м. сек.}^2,$$

или замедление 0,5 м./сек.

3. а) По у-нию (56а):

$$s = 20 \times 20 - \frac{0{,}5 \times 20^2}{2} = 20 \times 20 - 0{,}25 \times 20^2 = 300 \text{ м.}$$

б) В у-ниях (56а и б): $v = 0$, $v_0 = 20$, $w = 0{,}5$, а потому: $20 - 0{,}5t = 0$ и $s = 20t - 0{,}25t^2$,

откуда: $t = \dfrac{20}{0{,}5} = 40$ сек.; $s = 40\,(20 - 0{,}25 \times 40) = 40 \times 10 = 400$ м.

4. Применяем у-ния (58а и б), в которых

$$t = 2,\ v_0 = 29{,}4,\ g = 9{,}8 \text{ м./сек.}^2$$

$$h_2 = 29{,}4 \times 2 - \frac{9{,}8 \times 2^2}{2} = 58{,}8 - 19{,}6 = 39{,}2 \text{ м.}$$

Наибольшая высота подъема найдется из тех же у-ний при $v = 0$, получим:

$$0 = 29{,}4 - 9{,}8t \text{ и } h = 29{,}4t - 4{,}9t.^2$$

Решая, находим:

$$t = \frac{29{,}4}{9{,}8} = 3 \text{ сек.},$$

$$h = 29{,}4 \times 3 - 4{,}9 \times 3^2 = 44{,}1 \text{ м.}$$

5. По у-нию (56в) сила для сообщения ускорения

$$F = \frac{P}{g}\, w,$$

где $P = 10$ тонн $= 10.000$ кгр., $w = 0{,}5$ м./сек.^{2} и $g = 9{,}8$ м./сек.^{2}

$$F = \frac{10000}{9{,}8} \times 0{,}5 = 510 \text{ кгр.}$$

Канат сверх того несет вес колеса, а потому усилие в канате равно $10000 + 510 = 10510$ кгр. $= \backsim 10{,}5$ тонн.

6. При замедленном движении ускорение будет отрицательным, а потому (обратно предыдущей задаче) полное усилие, растягивающее канат, равно

$$10000 - \frac{10000 \times 0{,}75}{9{,}8} = 10000 - 765 = 9235 \text{ кгр.}$$

7. По у-нию (51): $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 21} = 20{,}3$ м. в сек.

8. Положив в у-ниях (58а и б) $v = 0$, исключаем t из у-ния (58б) и вставляем его в (58а). Решая у-ния:

$$0 = v_0 - gt \text{ и } h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad \text{(A)}$$

подобно указанному в примере 2 § 77, найдем $h = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

9. а) По предыдущей задаче высота подъема $h = \frac{v_0^2}{2g}$. Найдем скорость в конце падения с этой высоты, т. е. в мгновение прихода тела в точку бросания. Получим:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{v_0^2}{2g}} = \sqrt{v_0^2} = v_0.$$

б) Время подъема (t_1) по уравнению A (зад. 8) $t_1 = v_0 : g$. Время падения (t_2) найдем, взяв у-ние $v = gt$, в котором $v = v_0$, согласно только что найденному, т. е. $v_0 = gt_2$, откуда $t_2 = v_0 : g = t_1$.

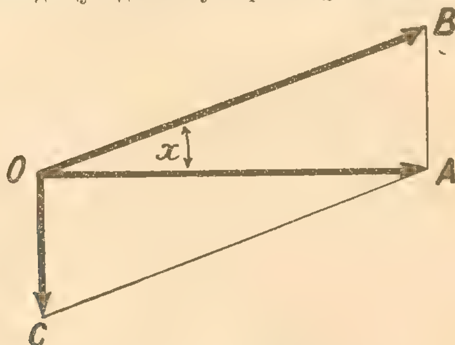
10. Имеем: $v_0 = 20$ м./сек., $v = 10$ м./сек., $t = 20$ сек., $P = 200$ тонн $= 200000$ кгр.; $m = P : g = \backsim 20400$, а потому

$$20400\,(10 - 20) = F \times 20,$$
$$F = -10200 \text{ кгр.}$$

Знак минус показывает, что сила действует по направлению обратному скорости.

ГЛАВА XII (§ 83).

1. Действие сил на тело выражается сообщением им ускорений; зная величину ускорения по условиям движения (у-ния 56а и б), мы можем найти силу, производящую данное ускорение (у-ние 56в).



Фиг. 88. К задаче 2.

2. Составная скорость лодки от усилия весел и от течения должна быть направленной от точки отхода по прямому пути на противоположную сторону. Пусть в фиг. 88 линия OA представляет собою составную скорость, OB направление движения лодки и OC направление течения. По условиям задачи $OB = 6$, а $OC = 2$ версты в час; отсюда

$$\sin x = \frac{AB}{OB} = \frac{2}{6} = 0{,}333, \text{ откуда угол } x = 19\tfrac{1}{2}^0.$$

3. Скорость, с которой лодка пересекает течение, изображается линией OA (фиг. 88), которая равна: $OB \times \cos x = OB \times \cos 19\tfrac{1}{2}^0 = 6 \times 0{,}943 = 5{,}66$ верст в час $= \backsim 47$ саж. в минуту.

Ту же скорость можем найти из выражения: $\sqrt{OB^2 - OC^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 5{,}66$.

4. Время равно пройденному пространству, деленному на скорость, т. е. $t = \frac{100}{47} = \backsim 2{,}1$ мин.

5. См. § 81.

6. Скорости согласно с § 82 складываются как силы, а потому составная скорость изобразится стороной, замыкающей треугольник, другие две стороны которого изображают скорости составляющих движений.

7. Искомая скорость может быть найдена подстановкой данных в выражение (60), где $v_x = 100$ м. в мин., $v_y = 40$ м. в мин. Получим: $V = \sqrt{100^2 + 40^2} = \backsim 108$ м. в мин.

8. Время это равно времени падения тела из C в A; если расстояние $CA = h$, то время t найдем из у-ния $h = \frac{gt^2}{2}$.

9. Дальность полета равна расстоянию $v_x t$, пройденному телом за время t, которое найдем из у-ния $h = \frac{gt^2}{2}$ при данной величине h.

10. Пользуемся у-ниями (60), в которых $y = 29{,}4$ м. Решая их, находим: $29{,}4 = \frac{gt^2}{2} = 4{,}9t^2$; $t = \sqrt{6} = 2{,}45$ сек.

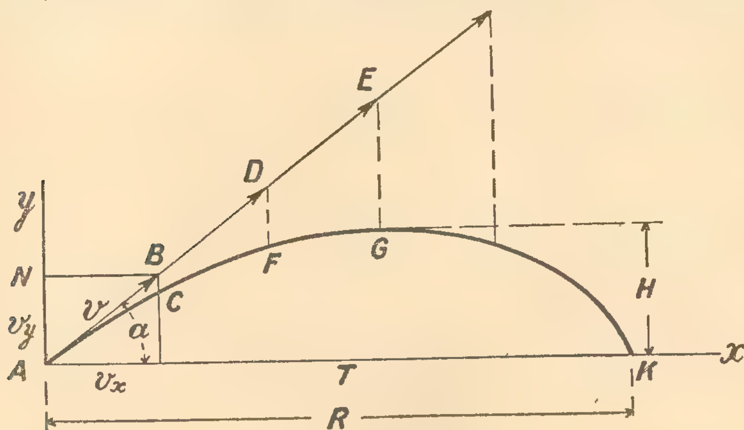
11. $x = v_x t = 7 \times 2{,}45 = 17{,}15$ м.

12. Искомая скорость (фиг. 62) найдется из выражения (60): $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = 7$ м. в сек., а v_y — вертикальная скорость в конце падения угля; она отвечает расстоянию $y = 29{,}4$ м., а потому равна $\sqrt{2gy} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 29{,}4} = 24$ м. в сек.; $V = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$ м. в сек.

Угол α скорости V с горизонтом найдем, пользуясь выражением

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{24}{7} = 3{,}4; \quad \alpha = 73^0\,20'$$

13. Если тело брошено под углом α к горизонту со скоростью V_0 (фиг. 89), то разлагая V_0 на составляющие по осям Ox и Oy, получим:



Фиг. 89. К задаче 13.

$v_x = V_0 \cos\alpha$ и $v_{y_0} = V_0 \sin\alpha$. Движение по Ox будет равномерным со скоростью v_{x_0}, а потому:

$$x = v_{x_0} t = V_0 t \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Движение по Oy будет равнозамедленным с начальной скоростью v_{y_0} и с ускорением g (под действием силы тяжести), а потому:

$$y = v_{y_0} t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{и} \quad v_y = v_{y_0} - gt$$

или

$$y = V_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\Gamma)$$

$$v_y = V_0 \sin\alpha - gt.$$

14. По у-нию (В): $x = V_0 \cos 45^0 \times t = 40 \times 0{,}707 \times t$.

Время t найдем из у-ния (Г), в котором $y = 0, V_0 = 40$, $\sin\alpha = 0{,}707$, а потому $0 = 40 \times 0{,}707t - 4{,}9t^2 = t\,(28{,}3 - 4{,}9t)$, откуда: $28{,}3 - 4{,}9t = 0$, $t = 5{,}77$ сек., а потому: $x = 40 \times 0{,}707 \times 5{,}77 = 163{,}2$ м.

ГЛАВА XIII (§ 87).

1. Линейная скорость точки N, когда колесо вращается, делая 75 обор. в мин., равна длине окружности круга, с радиусом 1 м. умноженной на число оборотов, т. е.

$$v = 2 \times 3{,}14 \times 1 \times 75 = 471 \text{ м. в мин.} = 7{,}85 \text{ м. в сек.}$$

Эту скорость колесо должно развить в течение 2 минут; ускорение равно численно приращению скорости в секунду, т. е.

$$w = \frac{7{,}85}{120} = 0{,}65 \text{ м. в сек.}^2$$

2. Искомая сила F, как всегда, равна произведению массы m на ускорение w, т. е. $mw = \frac{P}{g} w$, где P — вес обода и колеса. При равноускоренном движении $w = \frac{v}{t}$ у-ние (55а); в данном случае (у-ние 61) $v = \frac{2\pi rn}{60}$, где r — радиус колеса, n — число обор в мин. Следовательно,

$$F = \frac{P}{g} w = \frac{P}{g} \frac{v}{t} = \frac{P}{g} \times \frac{2\pi rn}{60t}.$$

Сила действует на расстоянии, отличающемся от r по величине; обозначая его через a, получим для искомой силы на основании теоремы моментов или условия равновесия сил на рычаге:

$$Ta = Fr; T = F \frac{r}{a},$$

а потому

$$T = \frac{P}{g} \times \frac{2\pi r^2 n}{60t \times a}.$$

Имеем данными: $P = 89$ пуд., $r = 5$ фт. 8 дм. $= \frac{17}{3}$ фт., $n = 90$, $t = 90$ сек., $a = 2$ фт., $g = 32{,}16$ фт./сек.²

$$T = \frac{89 \times 2 \times 3{,}14 \times 17 \times 17 \times 90}{32{,}16 \times 60 \times 3 \times 3 \times 90 \times 2} = \backsim 4{,}6 \text{ пуд.}$$

3. Применяем у-ния (61 и 62). Из первого находим

$$v = \frac{2 \times 3{,}14 \times 1{,}5 \times 100}{60} = 15{,}7 \text{ м./сек.},$$

а потому

$$u = \frac{15{,}7^2}{1{,}5} = 164 \text{ м. в сек.}^2.$$

4. Вес обода на погонный см. длины равен весу $8 \times 10 \times 1 = 80$ куб. см. Если вес куб. см. чугуна 7 грамм, то вес указанного объема: $80 \times 7 \times \frac{1}{1000} = 0{,}56$ кгр. Центробежная сила

$$C = \frac{Pv^2}{gr} = \frac{0{,}56}{9{,}8} 164 = 9{,}4 \text{ кгр.}$$

5 Давление на опоры равно центробежной силе не уравновешенного груза в 2 кгр. По у-нию (63) центробежная сила

$$C = \frac{Pv^2}{gr},$$

где $P = 2$кгр., v — линейная скорость этого груза $= \frac{1}{30} \times 1500 \times 3{,}14 \times$ $\times 0{,}45 = 70{,}65$ м. в сек. и $r = 0{,}45$ метр.

$$C = \frac{2 \times 70{,}65 \times 70{,}65}{9{,}8 \times 0{,}45} = 226{,}4 \text{ кгр.}$$

Величина давления оказывается очень большой. Отсюда вытекает важность уравновешивания вращающихся частей.

6. Из фиг. 66 (в тексте) возвышение рельса $h = b\sin\alpha$; угол α можем найти из выражения $\operatorname{tg}\alpha = C : P = \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} : P = \frac{v^2}{gr}$.

Угол α обыкновенно не велик, а потому (§ 65) можно положить: $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ и $h = b\operatorname{tg}\alpha = \frac{bv^2}{gr}$, где $b = 1{,}5$ м., $v = 36$ км. в час $= 10$ м. в сек., $g = 9{,}8$ м. в сек^2., $r = 200$ м., а потому:

$$h = \frac{1{,}5 \times 10^2}{9{,}8 \times 200} = 0{,}077 \text{ м.} = 77 \text{ мм.}$$

7. Выражение это совершенно неверно; указанные силы уравновешивать друг друга не могут, так как они приложены к разным телам; в случае, напр., вращения камня, привязанного к веревке, центростремительная сила приложена к камню, а центробежная к веревке. Эти силы по началу реакции равны, но не уравновешивают друг друга. Круговое движение тела не есть движение под действием системы сил, находящихся в равновесии.

ГЛАВА XIV (§ 94).

1. Работа определяется по формуле $A = Ph$, где $P = -0{,}5$ кгр., а h найдем из у-ния (58).

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где $v_0 = 28$ м./сек., $t = 2{,}9$ сек.,

$$h = 28 \times 2{,}9 - 4{,}9 \times 2{,}9^2 = 2{,}9\,(28 - 4{,}9 \times 2{,}9) =$$
$$= 2{,}9 \times (28 - 14{,}2) = 2{,}9 \times 13{,}8 = 40 \text{ м.}$$

Работа $A = -0{,}5 \times 40 = -20$ кгр. Знак минус перед величиной силы берем потому, что сила (вес тела) направлена обратно движению тела. При опускании шарика вниз на ту же высоту работа веса его будет: $+20$ кгр. м.

2. См. § 90. Масштабы возьмем, напр., такие: 10 м. в 1 см. и 1 кгр. в 2 см.

3. а) Средняя сила тяги равна $(1 + 2^1/_2) \times {}^1/_2 = 1{,}75$ пуд.

б) Работа $A = 1{,}75 \times 12 \times 7 = 147$ пудофут $= 147 \times 5 = 735$ кгр. м.

4. Работа равна $100 \times 60 = 6000$ кгр. м.; мощность $6000 : 30 = 200$ кгр. м. в сек. $= 200 : 75 = 2{,}66$ лош.

5. Мощность равна 7,2 пуд. $\times 100 \times 7$ фут. : $(15 \times 30) = 11{,}2$ лош.

6. Полное давление пара F на поршень равно $3 \times \frac{\pi d^2}{4}$, где $d = 28$ см.

$F = 3 \times \frac{3{,}14 \times 28^2}{4} = 1846$ кгр. При одном обороте или двух ходах поршня работа равна $1846 \times 36 \times 2 = 132912$ кгр. см. $= 1329{,}12$ кгр. м. $=$ $= \backsim 1330$ кгр. м.

7. Работа при 240 оборотах в минуту равна 1330×240 кгр. м.; работа в секунду:

$$\frac{1330 \times 240}{60} \text{ кгр. м.}$$

Мощность в лош.:

$$N = \frac{1330 \times 240}{60 \times 75} = \backsim 71 \text{ лош.}$$

8. Работа в час в пудофутах равна $45 \times 4{,}2 \times 3500$; работа в секунду:

$$\frac{45 \times 4{,}2 \times 3500}{3600}.$$

Мощность в лош., полагая 1 лош. = 15 пудофут в сек.,

$$N = \frac{45 \times 4{,}2 \times 3500}{3600 \times 15} = 12{,}25 \text{ лош.}$$

ГЛАВА XV (§ 98).

1. Литр воды весит 1 кгр.; полный вес поднимаемой в минуту воды составляет 1000 кгр.

Это количество воды проходит в минуту расстояние в 45 м., откуда совершаемая работа равна $1000 \times 45 = 45000$ кгр. м. Мощность же насоса

$$\frac{45000}{75 \times 60} = 10 \text{ лош.}$$

2. Потенциальная энергия равна произведению веса на вертикальное расстояние тела над плоскостью, относительно которой определяют запас энергии. Имеем $П = 400 \times 30 = 12000$ кгр. м.

3. Кинетическая энергия тела равна $\frac{mv^2}{2} = \frac{Pv^2}{2g}$. Для нахождения скорости v, которую тело будет иметь, пройдя вертикальное расстояние в 30 м., возьмем (§74)

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 30} = \sqrt{588} = 24{,}25 \text{ м. в сек.}$$

Кинетическая энергия

$$K = \frac{400 \times 24{,}25 \times 24{,}25}{2 \times 9{,}8} = 11980 = \backsim 12000 \text{ кгр. м.}$$

Основываясь на законе сохранения энергии (§ 97), причем в любой точке пути полная энергия тела есть величина постоянная, можем написать для начала и конца падения:

$$П_1 + K_1 = П_2 + K_2.$$

Но в начале падения скорость равна нулю, а потому $K_1 = 0$; в конце падения $П_2 = 0_1$, так как превышение тела над плоскостью, относительно которой определяем запас энергии, равно нулю. Поэтому $П_1 = K_2$, что мы и получили в предыдущей задаче (12000 кгр. м.).

4. Как указано в задаче 3, для любой точки пути движения тела: $K_1 + П_1 = K_2 \times П_2$; но в данном случае берется одна и та же точка, а потому для нее $П_1 = П_2$ и $K_1 = K_2$, кинетическая энергия при данной массе тела зависит только от его скорости; следовательно, искомые скорости равны между собою. Выше это было показано путем другого рассуждения (§79, задача 9).

5. Работа веса равна ph, а равная ей работа силы Fl, а потому:

$$Fl = ph \text{ и } F = p\frac{h}{l} = p\sin\alpha.$$

ГЛАВА XV (§ 102).

1. См. § 100.
2. См. § 100.
3. См. § 101.

4. Определение в § 101 более обще; при определении коэффициента в § 51 предполагалось, что пути, проходимые точками приложения действующего усилия и полезного сопротивления, одинаковы и потому вместо отношения работ можно брать отношение между силами.

5. Одна лош. час равна 632 калориям (§ 100), а потому одна тонна угля при совершенном использовании теплоты может доставить $7500 : 632 = 11{,}9$ лош. час.

6. Один кгр. угля передает воде $7500 \times 0{,}8 = 6000$ кал., а потому он испаряет $6000 : 650 = 9{,}2$ кгр. воды.

ГЛАВА XVI (§ 104).

1. $315 : 90 = 3{,}5$.

2. В точке нажатия зубцов развиваются равные между собою давления: S_2 на зубец колеса B и S_1 на зубец колеса A на валу барабана лебедки. Беря сумму моментов относительно оси колеса (§ 44), получаем для колеса A: $S_1 r_1 = Q \frac{D}{2}$; для колеса B: $S_2 r_2 = P_0 a$.

Деля одно у-ние на другое, сокращая $S_1 = S_2$ и находя P_0, будем иметь:

$$P_0 = \frac{1}{a} Q \frac{D r_2}{2 r_1} = Q \frac{D}{2} \frac{1}{a} \frac{1}{c} \text{ (c — передаточное число)}, \quad P = 1{,}2 P_0.$$

Из у-ния находим:

$$P = 1{,}2 \times 1000 \frac{200}{2} \frac{1}{400} \frac{1}{5} = \frac{12 \times 1000 \times 200}{10 \times 2 \times 400 \times 5} = 60.$$

3. Линейные скорости на окружностях шкивов одинаковы, т. е.

$$\frac{2\ \ r_1 n_1}{60} = \frac{2\pi r_2 n_2}{60},$$

откуда: $n_1 : n_2 = r_2 : r_1$.

Моменты вращения шкивов: $M_A = (T_1 - T_2) r_1$ и $M_B = (T_1 - T_2) r_2$, откуда $M_A : M_B = r_1 : r_2$.

4. $n_2 = n_1 \frac{r_1}{r_2} = 900 \times \frac{120}{270} = 400$.

5. Если обозначим усилие на окружности шкива через P, то $M = Pr$. При одном обороте шкива будет доставлена работа: $P \times 2\pi r$; при n оборотах в мин. $P \times 2\pi r n$. Работа в секунду или численно равная ей мощность $\frac{2\pi r n P}{60}$. Если P в кгр., а r в м., то мощность в лош.

$$N = \frac{2\pi}{60 \times 75} Prn = 0{,}0014 Prn = 0{,}0014 Mn.$$

6. а. Семь величин: s, v, v_0, t, w, F и P. Должны быть даны четыре (g постоянная), причем в числе их могут быть две из величин: F, P и w, так как они связаны лишь одним уравнением.

б. Тело весом $P = 100$ кгр., имевшее скорость $v_0 = 4$ м./сек., двигалось с ускорением $w = 6$ м./сек. в течение 8 сек. Найти F, v и s.

в. См. пункт а.

7. Применяем у-ния (56):

а. $w_1 = g \frac{F}{P} = 9{,}8 \frac{20}{30} = 6{,}53$ м./сек.

б. v_2 (в конце двух секунд) $= 6{,}53 \times 2 = 13{,}06$ м./сек.

в. s_2 (за две секунды) $= \frac{w_1 t^2}{2} = 6{,}53 \times \frac{4}{2} = 13{,}06$ м.

г. Работа за первый промежуток $P_1 = F_1 \times s_2 = 20 \times 13{,}06 = 261{,}2$ кгр. м.

д. Она равна сумме работ за отдельные промежутки.

е. Среднее усилие равно частному от деления всей работы на пройденное расстояние за 10 сек.

ж. См. § 91.

8. Работа насоса в минуту равна 2000×18 кгр. м. (вес литра воды равен килограмму); работа в секунду $\frac{2000 \times 18}{60}$.

$$\text{Мощность} = \frac{2000 \times 18}{60 \times 75} = 8 \text{ лош.}$$

Коэффициент полезного действия $k = 8 : 12 = 0,66$.

9. В у-нии (67): $k = 0,16$, $N = 25$ лош., $t = 8$ час., $W = 10.000$ кал., а потому: $Q = \frac{632\,Nt}{kW} = \frac{632 \times 25 \times 8}{0,16 \times 10000} = 79$ кгр.

10. В у-нии (67): $\frac{Q}{Nt} = 1$ фн. $= 0,4$ кгр., а потому:

$$k = \frac{632}{W \times 0,4} = \frac{632 \times 10}{10500 \times 4} = \backsim 0,15 = 15\%.$$

12. $R_1 = 202$ кгр., $R_2 = 298$ кгр., $AB = 456$ кгр., $BC = 505$ кгр. AC — 408 кгр.

13. По закону сохранения энергии (§§ 95—97): $\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = 2rp$, где r — радиус вращения, а p — вес тела.

Деля на $m = p : g$, находим: $v_A^2 = v_B^2 - 4rg = 225 - 128,8$,

$$v_A^2 = 96,2,\ v_A = 9,81 \text{ фт. в сек.}$$

В верхней точке центробежная сила равна:

$$\frac{P}{g}\,\frac{v_A^2}{r} = \frac{2 \times 96,2}{32,2 \times 1} = 5,98;$$

для натяжения веревки получим: $5,98 - 2$ (вес тела) $= 3,98$ фн.

Наименьшая скорость v_0 вверху найдется из у-ния: $\frac{P}{g}\,\frac{v_0^2}{r} - P = 0$, откуда:

$$v_0 = \sqrt{gr} = \sqrt{32,2 \times 1} = 5,67 \text{ фт. в сек.}$$

14. При равномерном движении все силы взаимно уравновешиваются, т. е. суммы горизонтальных и вертикальных составляющих равны нулю. Это дает два уравнения: $N_1 - N_2 = 0$; $P - Q - fN_1 - fN_2 = 0$, откуда $N_1 = N_2$ и $P = Q + 2fN_1$.

Возьмем уравнение моментов сил относительно точки встречи сил Q и N_2. В этом случае $M(Q) = 0$ и $M(N_2) = 0$,

а потому: $Pa - N_1h = 0$, откуда: $N_1 = P\frac{a}{h}$; $P = Q + 2f\frac{a}{h}P$; $P = \frac{Q}{1 - 2f\frac{a}{h}}$.

Подставляя сюда данные, получим:

$$P = \frac{180}{1 - 2 \times 0,15\,\frac{16}{150}} = \backsim 186 \text{ кгр.}$$

15. 1,8 тонн; 600 лош.

16. Найдем скорость в A из выражения (см. задачу 13):

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{32,2 \times 6} = \sqrt{193,2} = 13,9.$$

Для этого высота над точкой A должна быть равна (§ 74):

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{193,2}{2 \times 32,2} = 3 \text{ фут.};\ h = 2 \times 6 + 3 = 15 \text{ фут.}$$

Приложение.

Угол	Дуга	Хорда	Sin	Tg	Ctg	Cos			
0°	0	0	0	0	∞	1	1,414	1,5708	90°
1	0,0175	0,017	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	1,402	1,5533	89
2	0,0349	0,035	0,0349	0,0349	28,6363	0,9994	1,389	1,5359	88
3	0,0524	0,052	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	1,377	1,5184	87
4	0,0698	0,070	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	1,364	1,5010	86
5	0,0873	0,087	0,0872	0,0875	11,4301	0,9962	1,351	1,4835	85
6	0,1047	0,105	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	1,338	1,4661	84
7	0,1222	0,122	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	1,325	1,4486	83
8	0,1396	0,140	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	1,312	1,4312	82
9	0,1571	0,157	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	1,299	1,4137	81
10	0,1745	0,174	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	1,286	1,3963	80
11	0,1920	0,192	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	1,272	1,3788	79
12	0,2094	0,209	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	1,259	1,3614	78
13	0,2269	0,226	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	1,245	1,3439	77
14	0,2443	0,244	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	1,231	1,3265	76
15	0,2618	0,261	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	1,218	1,3090	75
16	0,2793	0,278	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	1,204	1,2915	74
17	0,2967	0,296	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	1,190	1,2741	73
18	0,3142	0,313	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	1,176	1,2566	72
19	0,3316	0,330	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	1,161	1,2392	71
20	0,3491	0,347	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	1,147	1,2217	70
21	0,3665	0,364	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	1,133	1,2043	69
22	0,3840	0,382	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	1,118	1,1868	68
23	0,4014	0,399	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	1,104	1,1694	67
24	0,4189	0,416	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	1,089	1,1519	66
25	0,4363	0,433	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	1,075	1,1345	65
26	0,4538	0,450	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	1,060	1,1170	64
27	0,4712	0,467	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	1,045	1,0996	63
28	0,4887	0,484	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	1,030	1,0821	62
29	0,5061	0,501	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	1,015	1,0647	61
30	0,5236	0,518	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	1,000	1,0472	60
31	0,5411	0,534	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	0,985	1,0297	59
32	0,5585	0,551	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	0,970	1,0123	58
33	0,5760	0,568	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,954	0,9948	57
34	0,5934	0,585	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,939	0,9774	56
35	0,6109	0,601	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,923	0,9599	55
36	0,6283	0,618	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,908	0,9425	54
37	0,6458	0,635	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,892	0,9250	53
38	0,6632	0,651	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,877	0,9076	52
39	0,6807	0,668	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,861	0,8901	51
40	0,6981	0,684	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,845	0,8727	50
41	0,7156	0,700	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,829	0,8552	49
42	0,7330	0,717	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,813	0,8378	48
43	0,7505	0,733	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,797	0,8203	47
44	0,7679	0,749	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,781	0,8029	46
45°	0,7854	0,765	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,765	0,7854	45°
			Cos	Ctg	Tg	Sin	Хорда	Дуга	Угол

Названия тригонометрическ. величин, указанные вверху таблицы, относятся к углам от 0 до 45° (первый столбец слева); названия внизу таблицы — к углам от 45° до 90° (крайний правый столбец). Синусы и тангенсы с увеличением угла растут, косинусы и котангенсы — уменьшаются.

Тригонометрические величины, встречающиеся в тексте.

Sin$a$ (определение, стр. 8), cos$a$ (стр. 8); tg$a$ (стр. 25,64), ctg$a$ = 1 : tg$a$, (стр. 69). tg$a$ = sin$a$: cos$a$ (стр. 25), $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ (стр. 11).